Математический анализ, лекции

Подольский Владимир Евгеньевич

Лекция №1 11.02.15.

Неопределенный интеграл.

<u>Опр.</u> Пусть $F(x) \in D(a,b)$ и $F'(x) = f(x)$. $F(x)$ наз. **первообразной функцией** $f(x)$ на (a,b).

<u>Опр.</u> Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на (a,b) наз. **неопределенным интегралом** $f(x)$.

Обозн. $\int f(x)\,dx$

<u>Теорема.</u> Пусть $F'(x) = f(x)$ на (a,b). Тогда $\int f(x)\,dx = \{F(x)+C\}_{C\in\mathbb{R}}$

<u>Д-во:</u> 1) $\forall C \quad (F(x)+C)' = f(x)$

2) Пусть $\Phi(x)$ – первообразная $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$.
Рассмотрим $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$.
$\varphi'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(x) = \text{const}$.

ч.т.д.

Договоренность: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Свойства: (Пусть $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ на (a,b))

1). $\forall k \in \mathbb{R} \quad \int k f(x)\,dx = kF(x) + C = \boxed{k\cdot\int f(x)\,dx}$

2). $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + C$

(1)–(2): линейность

<u>Теорема</u> (**Замена переменных в неопределенном интеграле**)

Пусть $F'(x) = f(x)$ на (a,b), $x = x(t)$ – опр-на на (t_0,t_1), $x(t) \in D(t_0,t_1)$ и $x((t_0,t_1)) \subset (a,b)$. Тогда $F(x(t))$ – первообразная $f(x(t))\cdot x'(t)$.

Д-во: $(F(x(t)))' = F'(x(t))\cdot x'(t) = f(x(t))\cdot x'(t)$.

ч.т.д.

$$\underset{F(x)+C}{\underset{\parallel}{\int f(x)\,dx}} = \int f(x(t))\cdot x'(t)\,dt = F(x(t))+C$$

Неопределенный интеграл как операция на дифференциалах.

$F'(x) = f(x)$ на (a,b)

Операцию неопределенного интегрирования можно считать отображением из мн-ва дифференциалов в совокупности функций, отличающихся друг от друга на константы.

$$\int : dF(x) \longrightarrow \{F(x)+C\}_{C\in\mathbb{R}}$$

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x) = F(x)+C$$

$$\int kf(x)\,dx = \int kF'(x)\,dx = \int d\,kF(x) = kF(x)+C$$

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int d(F(x)\pm G(x)) = F(x)\pm G(x)+C$$

$$\int f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int f(x(t))\,d(x(t)) = \int f(x(t))\cdot x'(t)\,dt = \int dF(x(t))$$

в силу инвариантности 1-го дифференциала

Теорема. (Интегрирование по частям в неопределенном интеграле)

Пусть $F(x), G(x) \in \mathcal{D}(a,b)$, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\boxed{\int F(x)\,dG(x) = F(x)\cdot G(x) - \int G(x)\,dF(x)}$$

Д-во: $d(F(x)\cdot G(x)) = G(x)\,dF(x) + F(x)\,dG(x)$

$$\int d(F(x)\cdot G(x)) = \int (G(x)\,dF(x) + F(x)\,dG(x))$$

$$F(x)\cdot G(x) + C = \int G(x)\,dF(x) + \int F(x)\,dG(x)$$

ч.т.д.

$$\int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\cdot G(x) - \int G(x)\,f(x)\,dx.$$

Интегрирование рациональных дробей

Опр. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная дробь, $P(x), Q(x)$ – многочлены.

Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь правильная

Пусть $Q(x) = A \cdot \prod_{k=1}^{n} (x-a_k)^{\alpha_k} \cdot \prod_{l=1}^{m} (x^2+p_l x+q_l)^{\beta_l}$,

тогда $\frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\text{многочлен}}{R(x)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(x-a_k)^i}\right) + \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{A_{lj}x+B_{lj}}{(x^2+p_l x+q_l)^j}\right)$

$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ распадается на задачи:

1. $\int R(x)\,dx = ?$ – тривиально
2. $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = ?$, $k \in \mathbb{N}$
3. $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = ?$, $n \in \mathbb{N}$

2: $k=1$ $\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a| + C$

$k>1$ $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)\cdot(x-a)^{k-1}} + C$

3: $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\left(A\cdot(x+\frac{p}{2}) + B - A\cdot\frac{p}{2}\right)dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{>0}\right)^n} = \left(x+\frac{p}{2} = t\right) =$

$= A\cdot\int \frac{t\,dt}{(t^2+\alpha^2)^n} + \left(B - A\cdot\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}$

1) $n>1$ $\int \frac{t\,dt}{(t^2+\alpha^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+\alpha^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + C$

$n=1$ $\int \frac{t\,dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+\alpha^2) + C$

2) $\underline{n=1}$ $\int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dt}{1+\frac{t^2}{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{d\frac{t}{\alpha}}{1+(\frac{t}{\alpha})^2} = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\alpha} + C.$

$t^2=(t^2+\alpha^2)-\alpha^2$

$\underline{n>1}$ $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n} = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n} - \int t\, d\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n} = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n} + 2n\int \frac{t^2 dt}{(t^2+\alpha^2)^{n+1}} =$

$= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n} + 2n(I_n - \alpha^2 I_{n+1})$

$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n\alpha^2}\left(\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n} + (2n-1)I_n\right).$

Метод Остроградского.

Мы видим, что интеграл от рациональной дроби содержит трансцендентные функции ($\ln$, arctg) и рациональные функции. При этом, $\ln$ и arctg появляются только при интегрировании -1 степеней. На это обратил внимание Остроградский и предложил упрощение процедуры вычисления интегралов от рац. дробей:

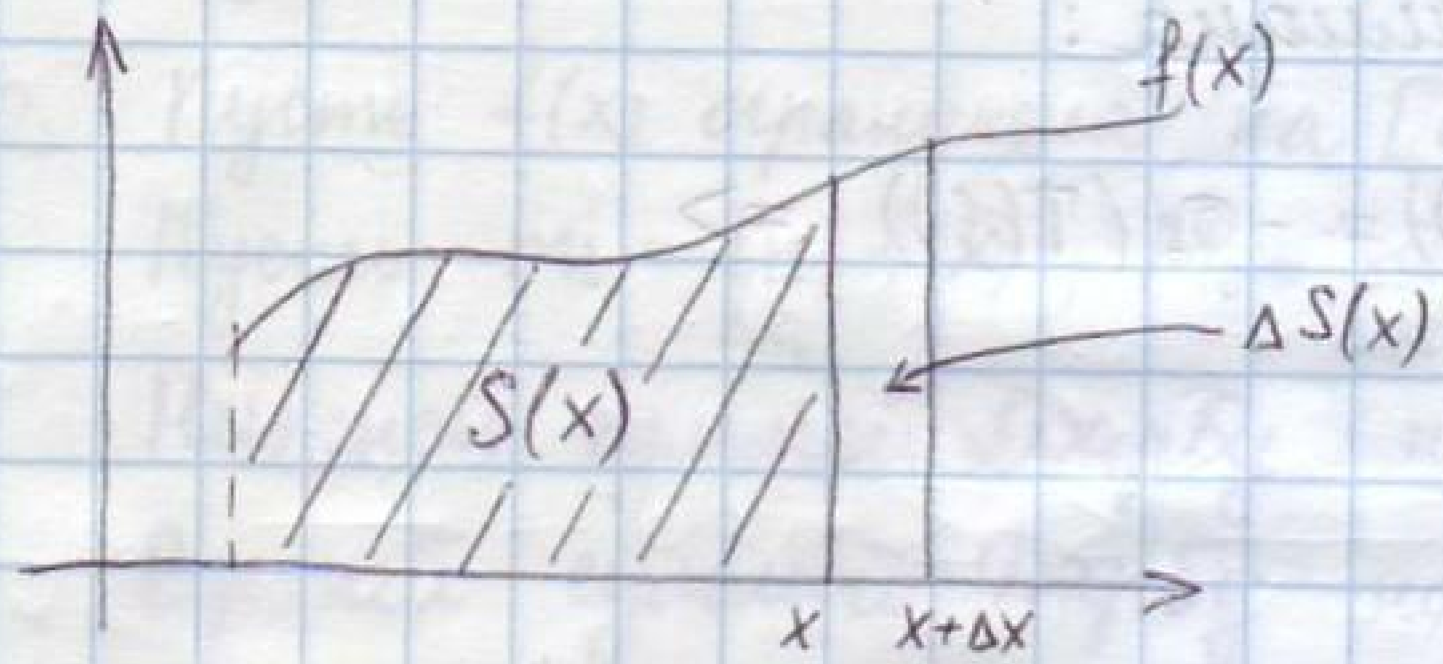
$$\int \frac{P(x)\,dx}{A\cdot\Pi(x-a_i)^{\alpha_i}\cdot\Pi(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j}} =$$

$$= R(x) + \frac{P_1(x)}{\Pi(x-a_i)^{\alpha_i-1}\cdot\Pi(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j-1}} + \int \frac{P_2(x)\,dx}{\Pi(x-a_i)\cdot\Pi(x^2+p_jx+q_j)}$$

правильные дроби

Лекция №2. 13.02.15.

Определенный интеграл Римана.



$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \sim h = f(x)$$

Опр. Упорядоченный по возрастанию или убыванию набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a,b]$ наз. разбиением $[a,b]$ (и обозн. T или T^-), если x_0 и x_n совпадают с концами отрезка.

$T: \{x_i\}_{i=0}^n, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$

Через Δx_i, $i = 1, \ldots, n$, обозн. отрезок с концами x_{i-1}, x_i

$|\Delta x_i| = |x_i - x_{i-1}|$.

Диаметром разбиения наз. $d(T) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\Delta x_i|$

Почти всегда будем считать разбиение возрастающим.

Опр. Разбиение T наз. размеченным, если задан любой набор точек $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ такой, что $\xi_i \in \Delta x_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

Обозн. $T(\xi)$.

Опр. Пусть $f(x)$ опр-на на $[a,b]$. $\boxed{\sigma_f(T(\xi)) = \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$ – интегральная сумма (Римана) $f(x)$ на $T(\xi)$.

разность коорд-т

Опр. Пусть $f(x)$ опр-на на $[a,b]$. Если $\exists\, I \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T(\xi)$ такого, что $d(T(\xi)) < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma_f(T(\xi)) - I| < \varepsilon$, то говорят, что $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Обозн. $f(x) \in R[a,b]$.

I наз. интегралом Римана $f(x)$ и обозн. $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma_f(T(\xi))}$

Простейшие свойства интеграла Римана:

1. Если рассмотреть T^-, то $\sigma_f(T^-(\xi)) = -\sigma_f(T(\xi)) \Rightarrow$
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

2. Если $f(x), g(x) \in R[a,b]$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a,b]$,
$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\int\limits_a^b f dx + \beta \int\limits_a^b g dx$

3. Если $f(x) \in R[a,b]$, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Д-во: $f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall T(\xi),\ d(T(\xi)) < \delta(\varepsilon),\ |\sigma_f(T(\xi)) - I| < \varepsilon$.

Пусть $f(x)$ неограничена $\Rightarrow \exists c \in [a,b]: \forall n \in \mathbb{N}\ \forall B(c)$
$\exists c_n \in B(c)$, что $|f(c_n)| > n$.

$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon$, пусть $c \in \Delta x_j$

$$I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon - \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) < I + \varepsilon - \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Фиксируем все точки, кроме ξ_j, а ξ_j выбираем из c_n. Противоречие.

ч.т.д.

Замечание. Не любая производная дифференцируемой функции может быть интегрируема по Риману (т.к. у производной может быть разрыв II рода)

Суммы Дарбу.

Опр. Пусть T_1 и T_2 - разбиения $[a,b]$, и $T_1 \subset T_2$. Тогда T_2 наз. измельчением T_1.

Опр. Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Пусть T - разбиение $[a,b]$.

Пусть $m_i = \inf\limits_{\Delta x_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{\Delta x_i} f(x)$

Нижней суммой Дарбу наз. $\overline{\overline{s}}(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

Верхней суммой Дарбу наз. $\underline{\underline{S}}(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

Свойства сумм Дарбу:

1. Если T_2 - измельчение T_1, то $\overline{\overline{s}}(T_1) \leq \overline{\overline{s}}(T_2)$, $\underline{\underline{S}}(T_1) \geq \underline{\underline{S}}(T_2)$

Д-во: Достаточно рассмотреть T_1 и T_2, отличающиеся одной точкой.

$$\overline{\overline{s}}(T_2) - \overline{\overline{s}}(T_1) = -\sum_{i=1, i\neq j}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) - m_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_j' (x_j' - x_{j-1}) +$$

$$+ m_j'' (x_j - x_j') = (m_j' - m_j)(x_j' - x_{j-1}) + (m_j'' - m_j)(x_j - x_j') \geq 0 \quad (m_j', m_j'' \geq m_j)$$

ч.т.д.

2. $\forall T_1, T_2 \quad \overline{\overline{s}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$

Д-во: Рассмотрим $T = T_1 \cup T_2$. $\overline{\overline{s}}(T_1) \leq \overline{\overline{s}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$.

ч.т.д.

3. $\overline{\overline{s}}(T) = \inf\limits_{\{\xi\}} \sigma_f (T(\xi))$, $\underline{\underline{S}}(T) = \sup\limits_{\{\xi\}} \sigma_f (T(\xi))$.

Д-во: Пусть $X_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, X_i - ограничены, $\{a_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$.

Тогда $\sup\limits_{\{x_i\}, x_i \in X_i} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$ ($\inf$ - аналогично).

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_i \in X_i$, что $x_i > \sup X_i - \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i > \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sup X_i - \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

$\Rightarrow \sup\limits_{\{x_i\}} \sum a_i x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sup X_i \quad \forall \{x_i\} \Rightarrow \sup \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$

ч.т.д.

Доказали более общий случай

ч.т.д.

25.02.15. Лекция №3.

Опр. Пусть $f(x)$ опр-на и огр-на на $[a,b]$, $\overline{\overline{s}}(T)$ и $\underline{\underline{S}}(T)$ – ее суммы Дарбу.

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(T) \text{ – нижний интеграл Дарбу}$$

$$I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(T) \text{ – верхний интеграл Дарбу}$$

(Очевидно, что $I_* \le I^*$)

Теорема. (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Р)

$f(x) \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T, \ d(T) < \delta(\varepsilon), \ \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{s}}(T) < \varepsilon.$

Д-во: $(\Rightarrow)$ $f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T, \ d(T) < \delta(\varepsilon),$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(T(\xi)) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}, \ \overline{\overline{s}}(T) \ge I - \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{s}}(T) < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ $\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{s}}(T) < \varepsilon \Rightarrow I^* - I_* < \varepsilon$

$\Rightarrow I^* = I_* = I.$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{s}}(T) < \varepsilon \\ &\overline{\overline{s}}(T) \le \sigma_f(T(\xi)) \le \underline{\underline{S}}(T) \\ &\overline{\overline{s}}(T) \le I \le \underline{\underline{S}}(T) \end{aligned}\right| \Rightarrow |\sigma_f(T(\xi)) - I| < \varepsilon$$

ч.т.д.

Следствие. $f(x) \in R[a,b] \Leftrightarrow I^* = I_*$

Замечание Пусть $f(x)$ опр-на и огр-на на $E \subset \mathbb{R}$. Колебанием функции f на мн-ве E наз. $w(f,E) = \sup_E f(x) - \inf_E f(x)$.

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{s}}(T) = \sum_{i=1}^{n} w(f, \Delta x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Классы интегрируемых функций.

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x) \in R[a,b]$

Д-во: $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x)$ равномерно непр-на на $[a,b]$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x', x'' \in [a,b], \ |x'-x''| < \delta(\varepsilon), \ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$\underline{S}(T) - \overline{s}(T) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\max_{\Delta x_i} f(x) - \min_{\Delta x_i} f(x))\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_{max_i}) - f(x_{min_i}))\cdot(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

ч.т.д.

Теорема 2 Если $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то $f(x) \in R[a,b]$.

Д-во: Пусть $f(x)\uparrow$. Если $f(a) = f(b)$, то очевидно.

Пусть $f(b) > f(a)$, пусть $d(T) < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

$$\underline{S}(T) - \overline{s}(T) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\cdot(x_i - x_{i-1}) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon.$$

ч.т.д.

Критерий Лебега.

Опр. Мн-во $E \subset \mathbb{R}$ наз. $\overbrace{\text{(лебеговой) меры нуль}}^{\text{мн-вом}}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ – не более чем счетный набор такой, что

1). $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$

2) $\sup\limits_{\{i_1,\dots,i_N\} \subset \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{N} |b_{i_j} - a_{i_j}| < \varepsilon$.

Обозн. $\mu(E) = 0$.

($\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \varepsilon$ – фактически то же самое, но нужно доказывать, что предел не зависит от нумерации)

Примеры: $\mathbb{Q}$ – счетное, мн-во Кантора – континуальное.

Теорема. (Критерий Лебега)

$f(x) \in R[a,b] \Leftrightarrow f(x)$ огр-на на $[a,b]$ и μ(мн-ва точек разрыва f) $= 0$.

Д-во: без доказательства.

(Сюжет док-ва: $\underline{\underline{S}} - \overline{\overline{s}} = \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$

Т.к. μ(мн-ва точек разрыва) $= 0$, то при достаточно мелком разбиении суммарная длина интервалов, на кот. есть точки разрыва, очень маленькая (хотя ω на них большое), а на др. интервалах ф-ция непр-на $\Rightarrow$ маленькое ω)

Свойства интеграла Римана

① Теорема (Интегрируемость на подотрезках)

$f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \forall [c,d] \subset [a,b]\ f(x) \in R[c,d]$.

Д-во: $f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall T,\ d(T) < \delta(\varepsilon),\ \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{s}}(T) < \varepsilon$.

$T' = T \cup \{c, d\}$ (измельчим) $\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T') - \overline{\overline{s}}(T') < \varepsilon$.

Пусть $c = x_j$, $d = x_k$ (в новом разбиении)

$$\varepsilon > \sum_{i=1}^{j} \omega(\Delta x_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=j+1}^{k} \omega(\Delta x_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} \omega(\Delta x_i)(x_i - x_{i-1}) \geq$$

$$\geq \sum_{i=j+1}^{k} \omega(\Delta x_i)(x_i - x_{i-1})$$

ч.т.д.

27.02.15. Лекция N 4.

② Теорема (Аддитивность)

$f(x) \in R[a,b]$ и $f(x) \in R[b,c] \Rightarrow f(x) \in R[a,c]$ и

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Д-во: Пусть $a<b<c$. (утв. верно независимо от того, как расположены точки)

Пусть $T(\xi)$ - разб. $[a,c]$. $\left|\sigma(f,T(\xi)) - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx\right|$ $(*)$

1. Если $b \in T$, $b = x_j$: $(*) = \left|\sum_{i=1}^{j} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx + \right.$
$\left. + \sum_{i=j+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_b^c f(x)dx\right| \le \left| \quad \right| + \left| \quad \right| < 2\varepsilon$

2. $b \in (x_j, x_{j+1})$: $(*) = \left|\underbrace{\sum_{i=1}^{j} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi')(b - x_j) - \int_a^b f(x)dx}\right. +$
$\underbrace{+ f(\xi'')(x_{j+1} - b) + \sum_{i=j+2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_b^c f(x)dx} \underbrace{- f(\xi')(b - x_j)} - \underbrace{f(\xi'')(x_{j+1} - b)} +$
$\left. + \underbrace{f(\xi_{j+1})(x_{j+1} - x_j)}\right| \le \left| \quad \right| + \left| \quad \right| + \left| \quad \right| + \left| \quad \right| + \left| \quad \right| < 5\varepsilon$

ч.т.д.

③ Линейность - была доказана раньше

④ Теорема.

$f(x), g(x) \in R[a,b]$, $f(x) \ge g(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

Д-во: 1) пусть $g(x) \equiv 0$, $f(x) \ge 0 \Rightarrow \sigma(f, T(\xi)) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$

2) $\forall g(x)$ $\quad \int_a^b (f(x) - g(x))dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

ч.т.д.

⑤ Теорема.

$f(x) \in R[a,b]$, $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, $\exists c \in [a,b]$: $f(x)$ непр-на в т. c и $f(c) > 0$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

Д-во: Из усл. следует, что $\exists \delta > 0$, что $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$ $f(x) \ge \frac{f(c)}{2}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \ge \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \ge \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}dx = \delta \cdot f(c) > 0.$$

ч.т.д.

⑥ Теорема

$f(x), g(x) \in R[a,b] \Rightarrow f(x)\cdot g(x) \in R[a,b]$.

Д-во: $|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \leq$

$\leq |f(x')|\cdot|g(x') - g(x'')| + |g(x'')|\cdot|f(x') - f(x'')| \leq A\cdot|g(x') - g(x'')| + B\cdot|f(x') - f(x'')|$,

где $A = \sup\limits_{[a,b]}|f(x)|$, $B = \sup\limits_{[a,b]}|g(x)|$

$\Rightarrow \omega(f\cdot g, E) \leq A\cdot\omega(g,E) + B\cdot\omega(f,E) \Rightarrow \underline{\underline{S}}(f\cdot g, T) - \overline{\overline{s}}(f\cdot g, T) \leq$

$\leq A\cdot(\underline{\underline{S}}(g,T) - \overline{\overline{s}}(g,T)) + B(\underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T)) < (A+B)\cdot\varepsilon$

ч.т.д.

⑦ Теорема

$f(x) \in R[a,b]$, $\exists\delta > 0$, что $f(x) \geq \delta$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \in R[a,b]$.

Д-во: $\left|\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right| = \frac{|f(x') - f(x'')|}{|f(x')|\cdot|f(x'')|} \leq \frac{1}{\delta^2}|f(x') - f(x'')| \Rightarrow \omega(\frac{1}{f}, E) \leq \frac{1}{\delta^2}\omega(f,E)$

ч.т.д.

⑧ Теорема

$f(x) \in R[a,b] \Rightarrow |f(x)| \in R[a,b]$

Д-во: $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')| \Rightarrow \omega(|f|, E) \leq \omega(f, E)$

ч.т.д.

⑨ Теорема

$f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

Д-во: $|\sigma(f, T(\xi))| \leq \sigma(|f|, T(\xi))$, дальше предельный переход.

ч.т.д.

Теорема (Первая теорема о среднем)

$f(x), g(x) \in R[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, $g(x) \ge 0 \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx}$$

Д-во: $m \cdot g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M \cdot \overbrace{g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}^{\geq 0}$

$$\Rightarrow m \cdot \sigma(g, T(\xi)) \le \sigma(f \cdot g, T(\xi)) \le M \cdot \sigma(g, T(\xi))$$

$$\Rightarrow m \cdot \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M \cdot \int_a^b g(x)\,dx \quad (*)$$

1) $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда $(*) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \mu$ – любое

2) $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда $(*) \Rightarrow m \le \underbrace{\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=\mu} \le M$

ч.т.д.

Пример: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx \overset{?!}{=} \mu \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$?! ($\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, но $\sin x \ngeq 0$ на $[-\pi, \pi]$)

Следствие. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \mu = f(c)$.

Интеграл с переменным верхним пределом.

Опр. $f(x) \in R[a,b]$, тогда $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ наз. *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема $f(x) \in R[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in C[a,b]$

Д-во: $|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \right| \le \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \right| \le \sup_{[a,b]} |f(t)| \cdot \left| \int_x^{x+\Delta x} dt \right| =$

$$= \sup_{[a,b]} |f(t)| \cdot |\Delta x| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

ч.т.д.

Теорема $f(x) \in R[a,b]$, $c \in (a,b)$, $f(x)$ непр-на в т. $c \Rightarrow$
$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ – дифференцируема в т. c и $F'(c) = f(c)$.

Д-во: $\left| \frac{F(c+\Delta x) - F(c)}{\Delta x} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int\limits_c^{c+\Delta x} f(t)dt - f(c) \right| =$

$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int\limits_c^{c+\Delta x} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x} \int\limits_c^{c+\Delta x} f(c)dt \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int\limits_c^{c+\Delta x} (f(t) - f(c))dt \right| \le$

$\le \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \sup\limits_{t \in [c, c+\Delta x]} |f(t) - f(c)| \cdot \left| \int\limits_c^{c+\Delta x} 1 dt \right| = \sup\limits_{t \in [c, c+\Delta x]} |f(t) - f(c)| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$

или наоборот

ч.т.д.

Замечание. Если $f(x)$ не непр-на в т. c, то про дифференцируемость $F(x)$ ничего сказать нельзя.

$(x^2 \sin\frac{1}{x})' = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \ne 0 \end{cases}$$

06.03.15. Лекция № 5.

Теорема. $f(x) \in R[a,b]$, $f(x) \in C(a,b) \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt$ – первообразная $f(x)$ на (a,b)

Д-во: очевидно.

Теорема. (Формула Ньютона – Лейбница)

$f(x) \in R[a,b]$, $\exists \{a_i\}_{i=1}^n \subset [a,b]$, $\exists F(x)$ такая, что $F(x) \in C[a,b]$, $F(x) \in D([a,b] \setminus \{a_i\}_{i=1}^n)$ и $F'(x) = f(x)$ на $[a,b] \setminus \{a_i\}_{i=1}^n$.

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

Д-во: Рассм. разб. $[a,b]$ $T \supset \{a_i\}_{i=1}^{n}$, $T=\{x_j\}_{j=0}^{k}$.

$$F(b)-F(a)=\sum_{j=1}^{k}\left(F(x_j)-F(x_{j-1})\right)=\sum_{j=1}^{k}F'(\xi_j)(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{k}f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})\longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx$$

ф-ла Лагранжа, т.к. $F(x)\in D(x_{j-1},x_j)$

(т.к. $f(x)\in R[a,b]$, то при измельчении разб., $d(T)\to 0$, инт. суммы → интегралу)

ч.т.д.

Опр. $F(x)$ из формулировки теоремы наз. обобщенной первообразной $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема (Замена переменных в определенном интеграле)

$f(x)\in C(a,b)$, $\varphi(t)\in C^1(\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ $\Rightarrow$

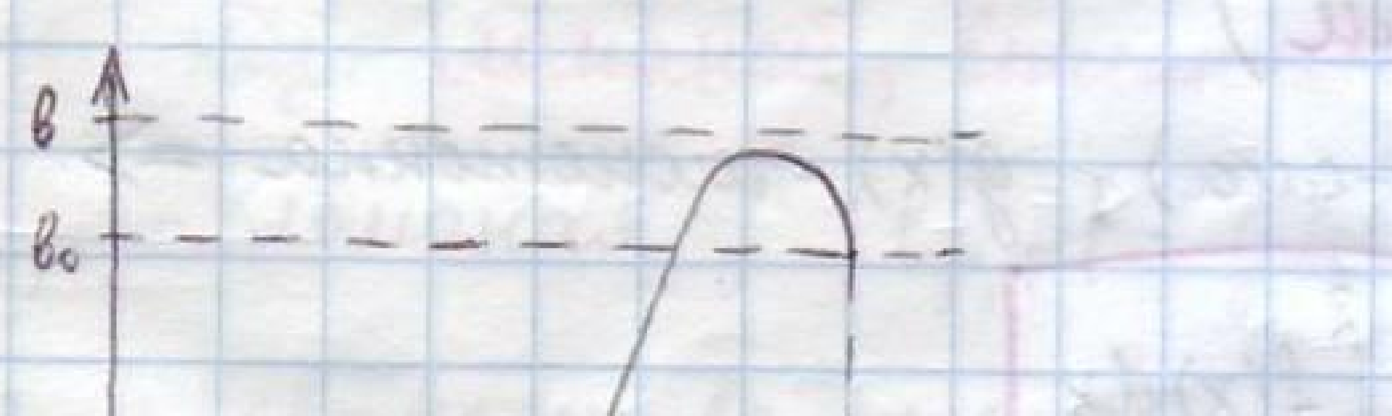
$$\boxed{\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx=\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt},\quad \text{где } a_0=\varphi(\alpha_0),\ b_0=\varphi(\beta_0),\ \alpha_0,\beta_0\in(\alpha,\beta).$$

Д-во: $\int_{a_0}^{x} f(t)\,dt$ – первообразная $f(x)$ на (a,b), $\int_{\alpha_0}^{t} f(\varphi(\xi))\cdot\varphi'(\xi)\,d\xi$ – первообразная $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на (α,β).

$\int_{a_0}^{x} f(t)\,dt=\Phi(x)$, $\int_{\alpha_0}^{t} f(\varphi(\xi))\cdot\varphi'(\xi)\,d\xi=\Phi(\varphi(t))$.

$$\Phi(b_0)-\Phi(a_0)=\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx,\quad \Phi(\varphi(\beta_0))-\Phi(\varphi(\alpha_0))=\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(\xi))\cdot\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

ч.т.д.



Теорема. (Интегрирование по частям)

$f(x), g(x) \in \mathcal{D}[a,b]$, $f'(x), g'(x) \in R[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

Д-во: $f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$

ч.т.д.

Теорема. (Ф-ла Тейлора с ост. членом в интегральной форме)

$f(t) \in \mathcal{D}^{n+1}[x_0, x]$, $f^{(n+1)}(t) \in R[x_0, x]$ $\Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt}$$

Д-во: $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} +$

$+ \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt = f'(x)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,d(x-t) = f'(x)(x-x_0) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} +$

$+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt = \ldots$

ч.т.д.

Замечание. Если $f^{(n+1)}(t) \in C[x_0, x]$, то (по первой теореме о среднем)

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Теорема. (Вторая теорема о среднем)

$f(x) \in C[a,b]$, $g(x) \in C^1[a,b]$ (непр. диф-ема), $g(x)$ – монотонна $\Rightarrow$

$\exists\, \xi \in [a,b]$: $\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx}$.

Д-во: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = g(x)\cdot\int_a^x f(t)\,dt\Big|_a^b - \int_a^b\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\cdot g'(x)\,dx =$

$$= g(b)\cdot\int_a^b f(t)dt - \int_a^{\xi} f(t)dt\cdot\int_a^b g'(x)dx = g(b)\cdot\int_a^b f(t)dt - (g(b)-g(a))\int_a^{\xi} f(t)dt =$$

первая теорема о среднем, считаем, что $g(x)\nearrow \Rightarrow g'(x)\geq 0$

$$= g(b)\cdot\int_{\xi}^b f(t)dt + g(a)\cdot\int_a^{\xi} f(t)dt$$

ч.т.д.

Замечание. Позже докажем вторую теорему о среднем для более широкого класса функций.

Приложения определенного интеграла Римана

Длина кривой.

Опр. Непрерывное отображение $\gamma(t): [a,b]\to\mathbb{R}^n$ наз. кривой в $\mathbb{R}^n$.
$(\gamma(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t)))$

Опр. Если при $t_1\neq t_2\in[a,b]$ $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, то $\gamma(t_1)$ наз. точкой самопересечения кривой, а мощность мн-ва $\{t : \gamma(t)=\gamma(t_1)\}$ наз. кратностью точки.

Опр. Если $\gamma(t)$ не имеет точек самопересечения, то $\gamma(t)$ — простая.
Если $\gamma(a)=\gamma(b)$ и др. точек самопересечения нет, то $\gamma(t)$ — простая замкнутая.

Опр. $\forall T = \{t_i\}_{i=0}^k$ отрезка $[a,b]$ $\{\gamma(t_i)\}_{i=0}^n$ — разбиение кривой.
Объединение отрезков прямых, соединяющих $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_{i-1})$, наз. ломаной, вписанной в γ при разбиении T.

$l_{\gamma,T}$ — ломаная, $|l_{\gamma,T}|$ — длина ломаной (сумма длин отрезков)

Если мн-во длин ломаных, вписанных в γ ограничено (на всех разбиениях), то кривая наз. спрямляемой, а sup длин ломаных наз. ее длиной $(|\gamma(t)|)$

Лемма. Если $T_1 \subset T_2$, то $|\ell_{\gamma,T_1}| \leq |\ell_{\gamma,T_2}|$

Д-во: Пусть T_1 и T_2 отличаются только одной точкой, $T_2 \setminus T_1 = t^*$, $t_j < t^* < t_{j+1}$. Рассмотрим плоскость (двумерную), проходящую через t_j, t^*, t_{j+1}. Если таких плоскостей много, то значит точки лежат на одной прямой и $|\ell_{\gamma,T_1}| = |\ell_{\gamma,T_2}|$, а если такая плоскость одна, то неравенство Δ.

ч.т.д.

Теорема. (Формула для длины кривой)

$\gamma(t) \in C^1[a,b] \Rightarrow \gamma(t)$ – спрямляемая и $\boxed{|\gamma(t)| = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i'(t))^2}\, dt}$

Д-во: ① Спрямляемость

$$|\ell_{\gamma,T}| = \sum_{j=1}^k \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t_j) - x_i(t_{j-1}))^2}\right) = \sum_{j=1}^k \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\xi_{ij}))^2}\,(t_j - t_{j-1}) \leq$$

ф-ла Лагранжа (все произв. – непр. => достигают max)

$$\leq \max_i \left(\max_t |x_i'(t)|\right) \cdot \sqrt{n} \cdot (b-a) \Rightarrow |\ell_{\gamma,T}| \text{ – огр-ны} \Rightarrow \gamma(t) \text{ – спрямляемая}$$

11.03.15. Лекция N 6

Д-во (продолжение):

② $|\ell_{\gamma,T}| = \sum\limits_{j=1}^k \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i'(\xi_{ij}))^2}\,(t_j - t_{j-1})$

$\int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i'(t))^2}\, dt = I$ – существует (все x_i непр. диф-емы)

Докажем, что I – длина кривой.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T(\xi),\ d(T) < \delta(\varepsilon),\ \left| \sum\limits_{j=1}^k \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i'(\xi_j))^2}\,(t_j - t_{j-1}) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'(\xi_j))^2}(t_j-t_{j-1})-\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'(\zeta_{ij}))^2}(t_j-t_{j-1})\right| =$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'(\xi_j))^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'(\zeta_{ij}))^2}\right)(t_j-t_{j-1})\right| \quad (*)$$

$$\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-b_i^2)\right|}{\sqrt{}+\sqrt{}} \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|\frac{|a_i|+|b_i|}{\sqrt{}+\sqrt{}} \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$$

$$(*) \leq \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}|x_i'(\zeta_{ij})-x_i'(\xi_j)|(t_j-t_{j-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\sup_{\Delta t_j} x_i' - \inf_{\Delta t_j} x_i')(t_j-t_{j-1}) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{\underline{S}}_{x_i'}(T)-\overline{\overline{s}}_{x_i'}(T)\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{т.к. } \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_1(\varepsilon)<\delta(\varepsilon)\ \forall i\ \underline{\underline{S}}_{x_i'}-\overline{\overline{s}}_{x_i'}<\frac{\varepsilon}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\,|l_{\gamma,T}|-I\,\right| < \varepsilon$$

предел длин ломаных при измельч. разб., а длина кривой – это sup (надо док-ть, что sup и есть этот предел)

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\, T^*:\ \ |\gamma(t)|-|l_{\gamma,T^*}|<\varepsilon$ (т.к. кривая спрямляемая $\Rightarrow$ есть sup)

Пусть $T^{**}\supset T^*$, $d(T^{**})<\delta_1(\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\,|l_{\gamma,T^{**}}|-I\,\right|<\varepsilon\\ |\gamma(t)|-|l_{\gamma,T^{**}}|<\varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\,|\gamma(t)|-I\,\right|<2\varepsilon \Rightarrow |\gamma(t)|=I$$

ч.т.д.

Квадрируемые фигуры. Площадь.

<u>Опр.</u> **ε-окрестностью** т. $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ наз. $B_\varepsilon(x_0,y_0):\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}$

<u>Опр.</u> $A\subset\mathbb{R}^2$. (x,y) – **внутренняя** для A, если $\exists\,\varepsilon>0$, что $B_\varepsilon(x,y)\subset A$

(x,y) – **внешняя** для A, если $\exists\,\varepsilon>0$, что $B_\varepsilon(x,y)\subset\mathbb{R}^2\setminus A$.

(x,y) – **граничная**, если $\forall\varepsilon>0$ $B_\varepsilon(x,y)$ содержит и точки A, и точки $\mathbb{R}^2\setminus A$.

Опр. Мн-во наз. **открытым**, если все его точки внутренние, **замкнутым** - если его дополнение открыто.

$\emptyset$ - открыто и замкнуто, $\mathbb{R}^2$ - открыто и замкнуто.

Опр. **Площадью прямоугольника Π** со сторонами a и b, $a \geq 0$, $b \geq 0$, наз. число $\mu(\Pi) = a \cdot b$.

(Точка и отрезок - тоже прямоугольники)

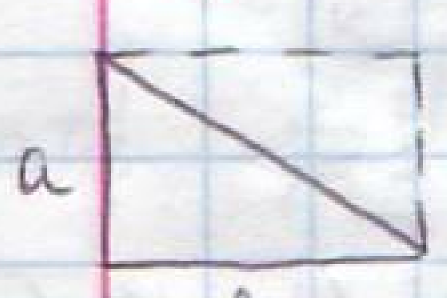
Опр. **Площадью** $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Pi_i$, $\forall i, j$ $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$, наз. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Pi_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(\Pi_i)$

Замечание. Площадь прямоугольника одинаковая независимо от того, какая часть граничных точек ему принадлежит, а какая нет.

Будем распространять понятие площади на более широкие классы мн-тв на плоскости с сохранением свойств:

1) $\mu\left(\bigcup\limits^{k} \Pi\right) \geq 0$
2) $\mu\left(\bigcup\limits^{k} \Pi\right) = \sum\limits^{k} \mu(\Pi)$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ - аддитивность
3) Если Π_1 переводится в Π_2 движением, то $\mu(\Pi_1) = \mu(\Pi_2)$
4) Если $\Pi_1 \subset \Pi_2$, то $\mu(\Pi_1) \leq \mu(\Pi_2)$

Опр. **Площадью прямоугольного Δ** с катетами a и b $\mu(\Delta) = \frac{1}{2}ab$



- произвольный Δ разбивается на два прямоугольных

Опр. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ наз. **многоугольной фигурой**.

Любое огр. мн-во на плоскости - **плоская фигура**.
(может быть несвязной)

Теорема (О многоугольных фигурах и их площадях)

1. $\forall \{P_i\}_{i=1}^{N}$ $\cup, \cap, \setminus$ – многоугольные фигуры

2. $\mu(P)$ не зависит от разб. на Δ.

Д-во: без док-ва.

Опр. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ – плоская фигура. Тогда P – замкнутая многоуг. фигура такая, что $A \subset P$, наз. описанной около A многоугольн. фигурой, а Q – открытая многоуг. фигура такая, что $Q \subset A$, наз. вписанной в A многоугольн. фигурой.

$\varnothing$ по опр. явл. открытой многоугольной фигурой, $\mu(\varnothing) = 0$.

Опр. $A \subset \mathbb{R}^2$ – плоская фигура,

верхняя площадь $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset P} \mu(P)$ (все $\mu(P) \geq 0 \Rightarrow \inf \exists$)

$A \subset P$ – опис. многоуг. фигуры

нижняя площадь $\mu_*(A) = \sup\limits_{Q \subset A} \mu(Q)$ (все $\mu(Q) \leq \mu(P) \Rightarrow \sup \exists$)

$Q \subset A$ – впис. многоуг. фигуры

Опр. Плоская фигура A наз. квадрируемой, если $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.

Теорема (1-й критерий квадрируемости)

A – квадрируемая $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon$ и Q_ε : $\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$.

пл. фигура

Д-во: $(\Rightarrow)$ A – квадр. $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$

$$\left.\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad & \exists P_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2} \\ & \exists Q_\varepsilon : \mu_*(A) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon$: $\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon$

$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$

ч.т.д.

Теорема. (2-й критерий квадрируемости)

A - квадрируемая $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$.

Д-во: $\Rightarrow$ A квадр. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon : Q_\varepsilon \subset A \subset P_\varepsilon, \ \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$.

$\Rightarrow \partial A \subset P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon$ (P_ε - замкнуто $\Rightarrow \partial A \subset P_\varepsilon$, Q_ε - открыто $\Rightarrow$ содержит только внутр. точки, которые внутр. и для A)

$P_\varepsilon = (P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon) \cup Q_\varepsilon \Rightarrow \mu(P_\varepsilon) = \mu(P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon) + \mu(Q_\varepsilon) \Rightarrow \mu(\underbrace{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon}_{\text{замкнуто}}) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(\partial A) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(\partial A) = 0 \Rightarrow \mu(\partial A) = 0$

13.03.15. Лекция N 7.

Д-во (продолжение):

$\Leftarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists P = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i : \partial A \subset P$ и $\mu(P) < \varepsilon$ (P - замкн. многоуг. фигура)

Покажем, что $\exists$ прямоуг. сетка с $\parallel$ осям с шагом h такая, что $\partial A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} \square_i$ с $\mu(\bigcup\limits^{N} \square_i) < 32\varepsilon$.

0. $\Delta_i = \bigcup\limits^{2} ◺$ (любой Δ - это $\cup$ 2-х прямоуг. Δ)

μ(покр) $< \varepsilon$ (не изменилась)

1. ▭ (каждый прямоуг. Δ покрываем прямоугольником)

μ(покр) $< 2\varepsilon$

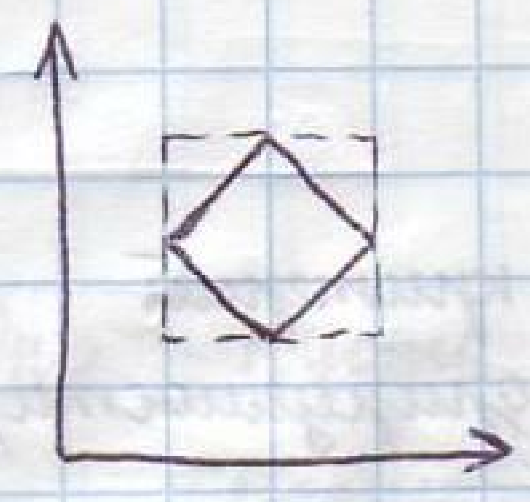
2. Покроем каждый ▭ квадратами

μ(покр.) $< 4\varepsilon$

- самый плохой случай, когда площадь увелич. почти в 2 раза

3. Каждый квадрат покрываем квадратом со сторонами $\parallel$ осям

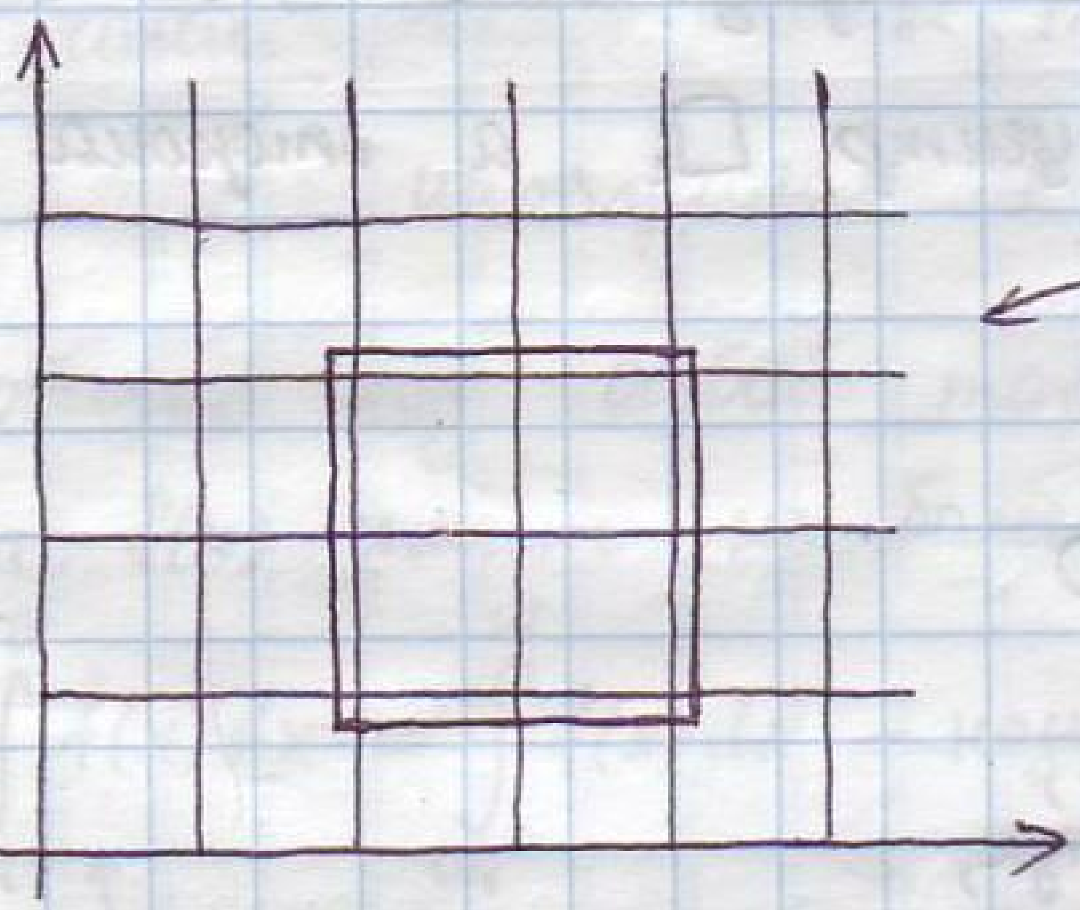
μ(покр) $< 8\varepsilon$



— самый плохой случай, когда $\square$ был под углом 45°

4. Берем наименьший квадрат из полученных, и пусть h = половина стороны наим. квадрата, и берем $\bigcup\limits_{h}^{N} h\square_i \supset \partial A$ (покрываем каждый квадрат набором квадратов из сетки, они не $\cap$ и со стороной h)

$\mu(\text{покр.}) < 32\varepsilon$



← самая плохая ситуация, когда площадь увеличивается почти в 4 раза

Пусть $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \square_i$ — всех таких квадратов, кот. состоят только из внутр. точек A, Q — открытое (берем квадр. замкн. и выбрасываем границу)

Пусть $P = \bigcup\limits^{N} \square_i \supset \partial A$, P — замкнутое.

Пусть $P_1 = P \cup Q$, докажем, что $A \subset P_1$:

$\mathbb{R}^2 \setminus P_1$ содержит или $\square$, состоящие из внешних точек A, или $\square$, состоящие из внешних и внутренних точек A (без граничных). Второго не бывает.

отрезок состоит только из внутр. и внеш. точек A, кажд. внутр. точка имеет окр-ть, сост. из внут. точек, внешняя — имеет окр-ть, сост. из внеш. точек, кажд. внут. и внеш. покрываем такой окр-тью, получаем покрытие отрезка, выделяем конеч. подпокр, противоречие.

Получим: $Q \subset A \subset P_1$

$$\mu(P_1) - \mu(Q) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{покр. границу}}}{\mu(P)} < 32\varepsilon \Rightarrow A\text{ - квадрируемая (1-й критерий квадрируемости)}$$

ч.т.д.

Теорема. $\gamma(t)$ - простая замкнутая спрямляемая кривая $\Rightarrow$ область, ограниченная $\gamma(t)$ - квадрируемая.

Д-во: Покажем, что $\mu(\gamma(t)) = 0$.

Разобьем $\gamma(t)$ на n кусков одинаковой длины, $\{(x_i, y_i) \in \gamma(t)\}_{i=0}^{n}$ (длина спрямляемой кривой монотонно $\uparrow \Rightarrow$ разбиение $\exists$).

Рассмотрим $\{\square_i\}_{i=0}^{n}$ - такие, что (x_i, y_i) - центр $\square_i$, а сторона квадрата - $\frac{2\cdot|\gamma(t)|}{n} \Rightarrow \gamma(t) \subset \bigcup\limits_{i=0}^{n} \square_i$

$$\mu^*(\gamma(t)) \le \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{n} \square_i\right) \le \frac{4\cdot|\gamma(t)|^2}{n^2}\cdot(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

на самом деле, квадратов n штук, т.к. $\gamma(t)$ - замкнутая

ч.т.д.

Теорема. (Геометрический смысл интеграла Римана)

$f(x) \in R[a,b]$, $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \Phi = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ - квадрируемая и $\mu(\Phi) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Д-во: Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ - разбиение $[a,b]$,

$P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{(x,y) : x_{i-1} \le x \le x_i, 0 \le y \le \sup\limits_{\Delta x_i} f(x)\}$ - объедин. прямоугольников.

$Q = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{(x,y) : x_{i-1} < x < x_i, 0 < y < \inf\limits_{\Delta x_i} f(x)\}$

$Q \subset \Phi \subset P$

$\mu(P) - \mu(Q) = \underline{S}(T) - \overline{S}(T)$ (1-й крит. квадрируемости)

ч.т.д.

Несобственные интегралы.

<u>Опр.</u> Пусть $f(x)$ опр-на на $[a, \omega)$, где $\omega \in \mathbb{R}$ или $\omega = +\infty$, и пусть $\forall b \geq a : [a, b] \subset [a, \omega)$ $f(x) \in R[a, b]$.

Тогда $\lim\limits_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)dx$ наз. **несобственным интегралом** $f(x)$ на $[a, \omega)$ и обозначается $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ (это не интеграл Римана).

Если этот $\lim \exists$, то несобст. интеграл наз. **сходящимся**, а если $\nexists$, то — **расходящимся**.

<u>Замечание.</u> Если $\omega \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ иногда наз. несобственным интегралом I рода, а если $\omega = +\infty$, то II рода.

ω обычно наз. особой точкой несобственного интеграла (или $f(x)$).

Если $f(x)$ имеет не более чем счетное мн-во особых точек, то

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)dx = \int\limits_{\omega_1}^{\omega} f(x)dx$$ — называют несобственным интегралом (хотя это сумма)

$\uparrow$ каждый содержит не более 1 особой точки

или $\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)dx = \int\limits_{\omega_1}^{\omega} f(x)dx$

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (будем изучать случаи с 1 особой точкой)

<u>Теорема.</u> (Критерий Коши сходимости несобст. интеграла)

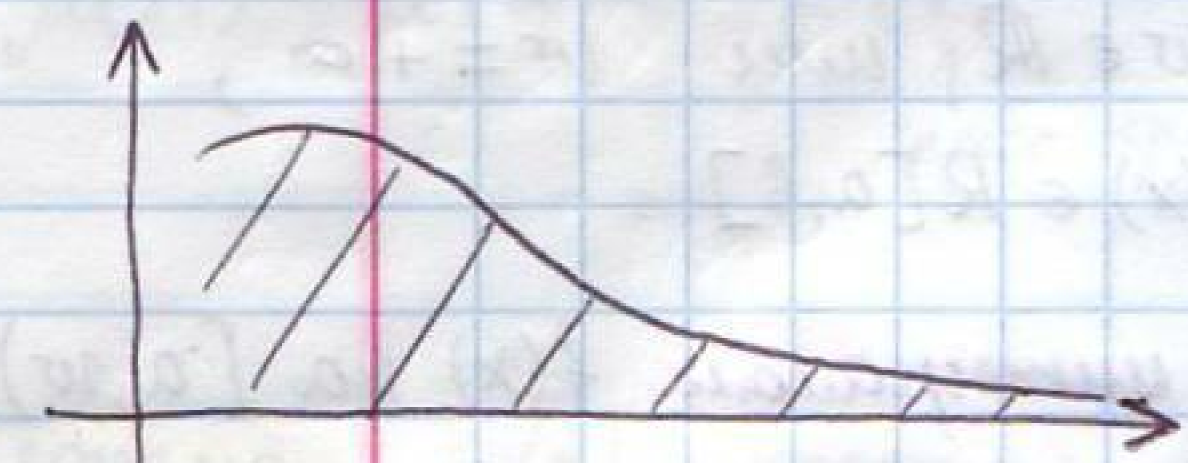
$\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists b_\varepsilon > a \; \forall x_1, x_2 > b_\varepsilon \quad \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

<u>Д-во:</u> $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

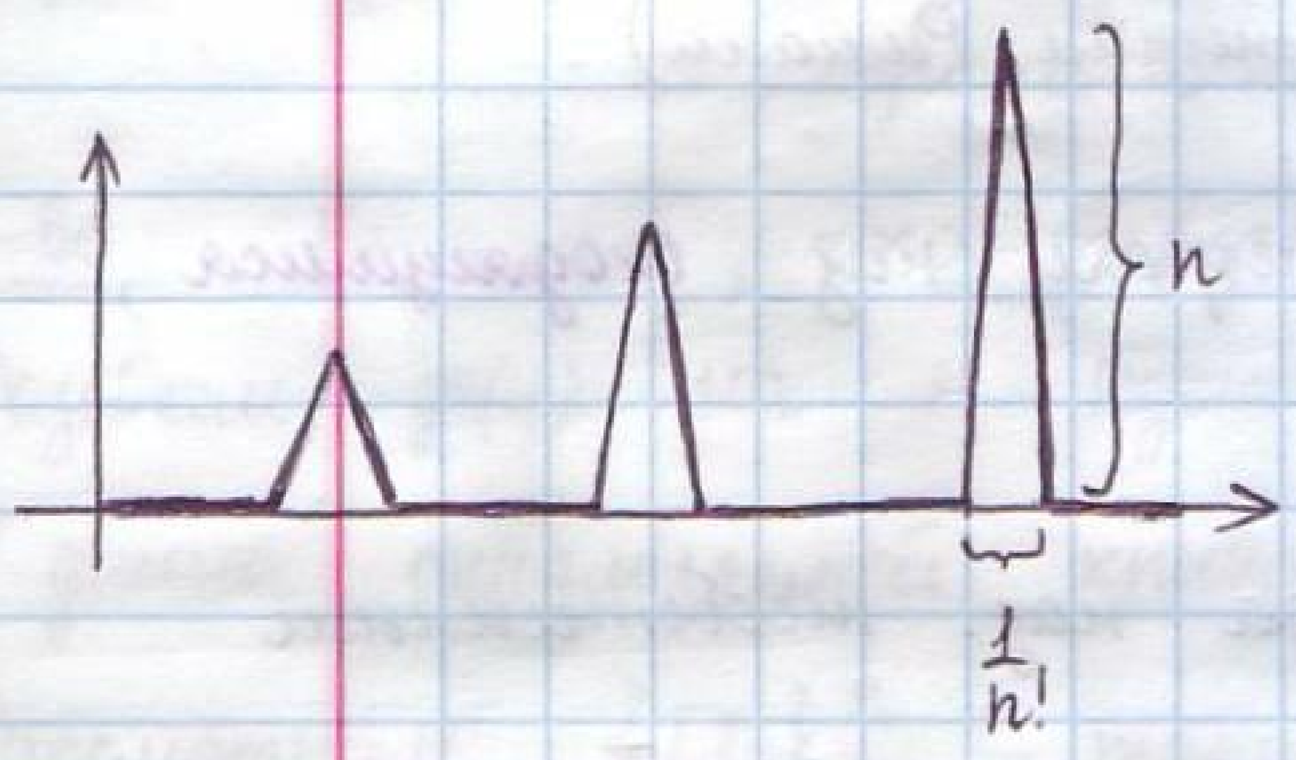
$\exists \lim\limits_{x \to \omega} F(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists b_\varepsilon > a \; \forall x_1, x_2 > b_\varepsilon \quad |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$

ч.т.д.

Замечание. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, то $a_n \to 0$



Есть интуитивное ощущение, что, чтобы площадь под графиком имела конеч. lim, функция должна стремиться к 0. Это неверно.



$$S_\Delta = \frac{1}{2(n-1)!} \Rightarrow \sum S_\Delta \text{ будет иметь конечный lim.}$$

18.03.15. Лекция № 8.

Свойства несобственных интегралов:

1. Линейность

$\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ – сходятся $\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\int\limits_a^\omega (\alpha f + \beta g)dx$ – сход.

2. $f(x)$ опр-на на $[a, \omega)$, $\forall b > a$ $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow$

$\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_b^\omega f(x)dx$ – равносходящиеся

3. Интегрирование по частям в несобственном интеграле.

$f(x), g(x) \in C^1[a, \omega)$. Рассмотрим $\int\limits_a^\omega f(x)g'(x)dx$, $\int\limits_a^\omega f'(x)g(x)dx$, $f(x)g(x)\Big|_a^\omega$ (тоже предел). Если любые два из 3-х $\exists$, то $\exists$ и

$$f(x)g(x)\Big|_a^\omega = \left(\lim_{x\to\omega} f(x)g(x) - f(a)g(a)\right)$$

третий и $\int\limits_a^{w} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{w} - \int\limits_a^{w} f'(x)g(x)\,dx$

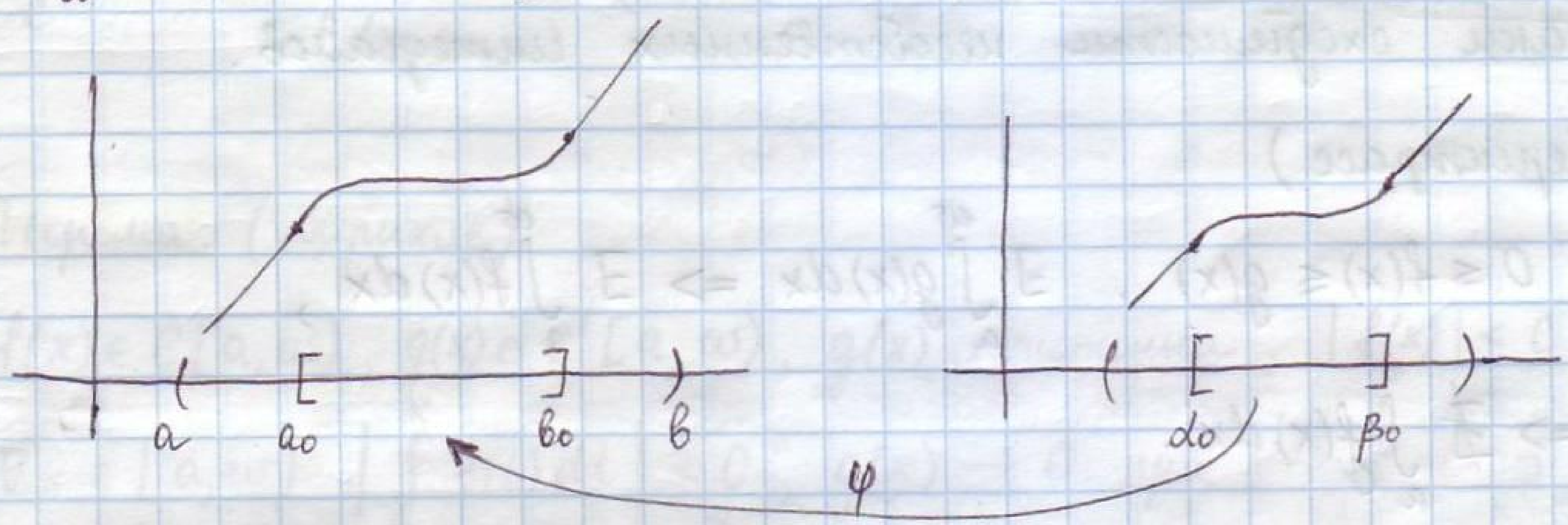
4. <u>Замена переменных</u>

$f(x) \in C[a, w)$, $\varphi(t) \in C^1[\alpha, \tilde{w})$, $\varphi(\alpha) = a$, $\forall t \in [\alpha, \tilde{w})$ $a \leq \varphi(t) < w$,

и при $t \to \tilde{w}$ $\varphi(t) \to w$.

$\exists \int\limits_a^{w} f(x)\,dx \Rightarrow \exists \int\limits_{\alpha}^{\tilde{w}} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ (и они равны)

$\nexists \int\limits_a^{w} f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int\limits_{\alpha}^{\tilde{w}} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$



(Если нужно, ф-цию можно продлить за пределы)

5. $\exists \int\limits_a^{w} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{w} g(x)\,dx$, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^{w} f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{w} g(x)\,dx$

6. $\forall b \in [a, w)$ $f(x) \in R[a, b]$, $\exists \int\limits_a^{w} |f(x)|\,dx \Rightarrow$

$\exists \int\limits_a^{w} f(x)\,dx$ и $\left|\int\limits_a^{w} f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^{w} |f(x)|\,dx$

<u>Д-во:</u> $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$ (критерий Коши)

ч.т.д.

Опр. Если $f(x) \in R[a,b]$ $\forall b \in [a, \omega)$ и сходится $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ наз. **абсолютно сходящимся.**

Если $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$ расходится, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ наз. **условно сходящимся.**

Замечание. Изначально были термины абсолютно - неабсолютно, условно - безусловно.

Признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема (Вейерштрасс)

$\forall x \in [a, \omega)$ $0 \le f(x) \le g(x)$. $\exists \int\limits_a^\omega g(x)dx \Rightarrow \exists \int\limits_a^\omega f(x)dx$,

$\nexists \int\limits_a^\omega f(x)dx \Rightarrow \nexists \int\limits_a^\omega g(x)dx$.

Д-во: $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)dx\right|$ – модуль меньше

ч.т.д.

Теорема (асимптотич. сравнения)

$f(x), g(x) > 0$ на $[a, \omega)$, $\forall b \in [a, \omega)$ $f, g \in R[a,b]$ и $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$ $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ – равносходящиеся.

Д-во: $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \exists x' \in [a, \omega) : \forall x > x'$ $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$ $\forall x > x'$, признак Вейерштрасса

ч.т.д.

Теорема. (Абель)

$f(x) \in C[a, \omega)$, $g(x) \in C^1[a, \omega)$, $g(x)$ монотонна, $\exists C > 0$:

$|f(x)| < C$, $|g(x)| < C$, $\exists \int\limits_a^{\omega} f(x)dx \Rightarrow \exists \int\limits_a^{\omega} f(x) g(x)\, dx$.

Д-во: $$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) g(x)\, dx \right| = \left| g(x_1) \int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)dx + g(x_2) \int\limits_{\xi}^{x_2} f(x) dx \right| \left(\begin{matrix}\text{2-я теор.}\\ \text{о среднем}\end{matrix}\right) \leq$$

$$\leq \underset{\hat{C}}{|g(x_1)|} \cdot \underset{\overset{\wedge}{\varepsilon\ (\text{кр. Коши})}}{\left| \int\limits_{x_1}^{\xi} f(x) dx \right|} + \underset{\hat{C}}{|g(x_2)|} \cdot \underset{\overset{\wedge}{\varepsilon}}{\left| \int\limits_{\xi}^{x_2} f(x) dx \right|} < 2C \cdot \varepsilon$$

ч.т.д.

Теорема. (Дирихле)

$f(x) \in C[a, \omega)$, $g(x) \in C^1[a, \omega)$, $g(x)$ монотонна, $|f(x)| < C$, $|g(x)| < C$,

$\forall x \in [a, \omega)$ $\left| \int\limits_a^x f(t)dt \right| < C$, $g(x) \to 0$ при $x \to \omega \Rightarrow \exists \int\limits_a^{\omega} f(x) g(x) dx$.

Д-во: $$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) dx \right| = \left| g(x_1) \int\limits_{x_1}^{\xi} f(x) dx + g(x_2) \int\limits_{\xi}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \underset{\overset{\wedge}{\varepsilon}}{|g(x_1)|} \cdot \underset{\overset{\wedge}{2C}}{\left| \int\limits_{x_1}^{\xi} f(x) dx \right|} + \underset{\overset{\wedge}{\varepsilon}}{|g(x_2)|} \cdot \underset{\overset{\wedge}{2C}}{\left| \int\limits_{\xi}^{x_2} f(x) dx \right|} < 4C \cdot \varepsilon$$

ч.т.д.

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ – интеграл Дирихле

(первообр. синуса огр-на, $\frac{1}{x}$ – монотонна, $\frac{1}{x} \to 0$)

„Контрпример" ко 2-й теореме:

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx$$

сходится — расходится

$$\left(?! \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x\,(\sqrt{x}+\sin x)}{\sqrt{x}\cdot \sin x} \overset{?!}{=} 1 \right)$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Интеграл разбивается на 4 части, три сходятся, одна расход. => интеграл расходится.

Интеграл в смысле главного значения Коши.

Опр. Пусть $g(x) \in R[-A, A]$ $\forall A>0$. Тогда $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$ наз.

главным значением интеграла в смысле Коши.

Обозн. $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Опр. Пусть $f(x) \in R[a, c-\varepsilon]$ и $f(x)\in R[c+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon>0$.

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) = V.p. \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

(Не является несобств. интегралом, т.к. две особые точки, но не требуем отдельного $\exists$ пределов, мы их связываем симметрично)

Теорема Если $\exists$ несобств. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$, то $\exists$ и главное знач. в смысле Коши на всей прямой, и они равны.

Аналогично на конеч. отрезке с особой т. с.

Д-во: очевидно.

Теорема. $f(x) \in R[-A, A] \quad \forall A > 0 \Rightarrow$

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2} dx$$ ($\exists$ или $\nexists$ одновременно)

превратилось в несобст. $\int$.

Д-во: $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{нечетная}}$

$$\int\limits_{-A}^{A} \frac{f(x)-f(-x)}{2} dx = 0 \quad \forall A$$

ч. т. д.

Аналогичная теорема верна и на отрезке.

Лекция №9. 20.03.15.

Функции ограниченной вариации
(функции с конечным изменением)

Опр. Пусть T – разбиение $[a, b]$, $f(x)$ опр-на на $[a, b]$.

$V(f, T) = \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ – вариация f на разбиении T.

Опр. Если мн-во $V(f, T)$ огр-но ($\forall T$ одной константой), то $f(x)$ наз. функцией с огранич. вариацией, $f(x) \in V[a, b]$,

а $\sup\limits_{T} V(f, T) = \bigvee\limits_{a}^{b} f(x) \; (= \underset{[a,b]}{var} f(x))$ – полная вариация ф-ции.

Свойства функций с огранич. вариацией на отрезке:

1. $f(x) \in V[a,b] \Rightarrow \exists C > 0 : |f(x)| < C$

Д-во: $|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) + |f(a)|$.

ч.т.д.

2. При измельчении разб. $T \subset T^*$ $\quad V(f,T) \leq V(f,T^*)$

3. $f(x) \in V[a,b]$, $[c,d] \subset [a,b] \Rightarrow f(x) \in V[c,d]$

Д-во: $V(f, T_{[c,d]}) \leq V(f, T^*_{[a,b]} \supset T_{[c,d]}) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$

4. (<u>Аддитивность</u>)

$f \in V[a,b]$, $\forall c \in (a,b)$ $\quad \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x)$.

Д-во: Пусть $T_{[a,b]} \ni c$

$V(f, T_{[a,b]}) = V(f, T_{[a,c]}) + V(f, T_{[c,d]})$ (перейдем в рав-ве к sup)

$\sup\limits_{T: T \ni c} V(f, T_{[a,b]}) = \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \leftarrow$ sup по всем разбиениям

sup по части разбиений

С др. стороны, $\forall T_{[a,b]}$ и $T^*_{[a,b]} = T_{[a,b]} \cup \{c\}$

$V(f, T_{[a,b]}) \leq V(f, T^*_{[a,b]}) = V(f, T^*_{[a,c]}) + V(f, T^*_{[c,b]}) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$

Перейдем к sup: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$

ч.т.д.

5. $f, g \in V[a,b] \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha f + \beta g \in V[a,b]$, $\quad fg \in V[a,b]$, и если $g(x) \geq \delta > 0$ $\forall x [a,b]$, то $\frac{f}{g} \in V[a,b]$.

Д-во: Докажем только $fg \in V[a,b]$ (должны уметь доказывать все)

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) +$$

$$+ f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |g(x_{i-1})| \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq C \cdot \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + C \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq C \cdot \left(\bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g \right).$$

ч.т.д.

Теорема $\forall f \in V[a,b]$ $\exists \varphi(x), \psi(x)$ – определенные и монотонно $\nearrow$ на $[a,b]$: $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

Д-во: $\varphi(x) = \bigvee_a^x f(t)$, $\varphi(x) \nearrow$ очевидно, $\psi(x) = \bigvee_a^x f(t) - f(x)$.

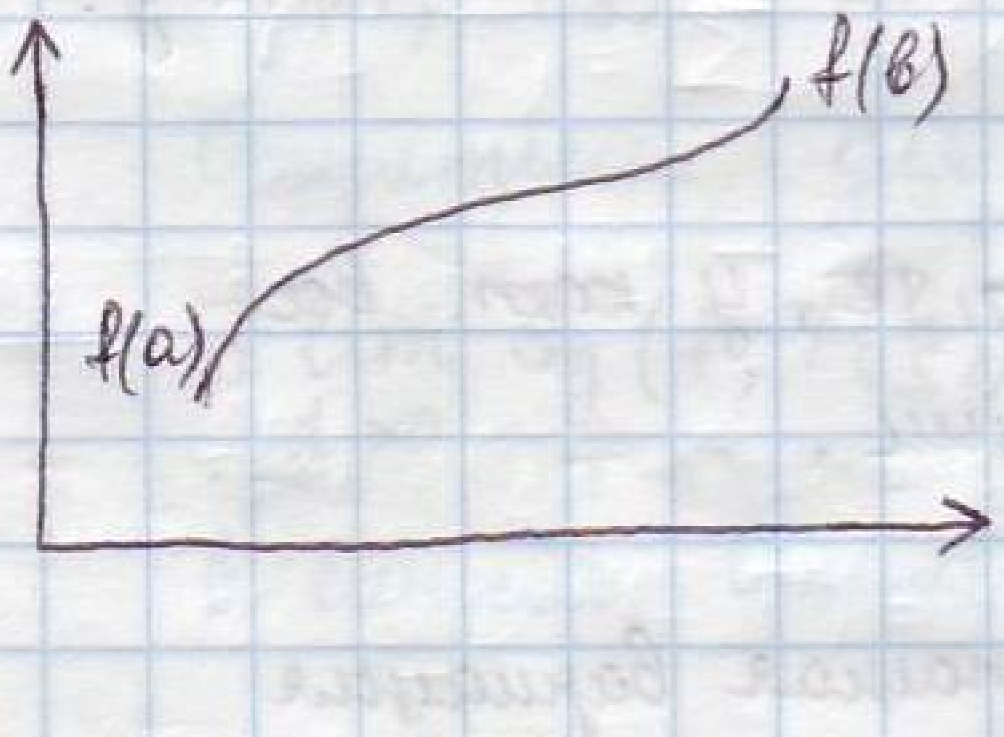
Докажем, что $\psi(x) \nearrow$, пусть $x_2 > x_1$:

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \bigvee_a^{x_2} f(t) - \bigvee_a^{x_1} f(t) - f(x_2) + f(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f(t) - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0,$$

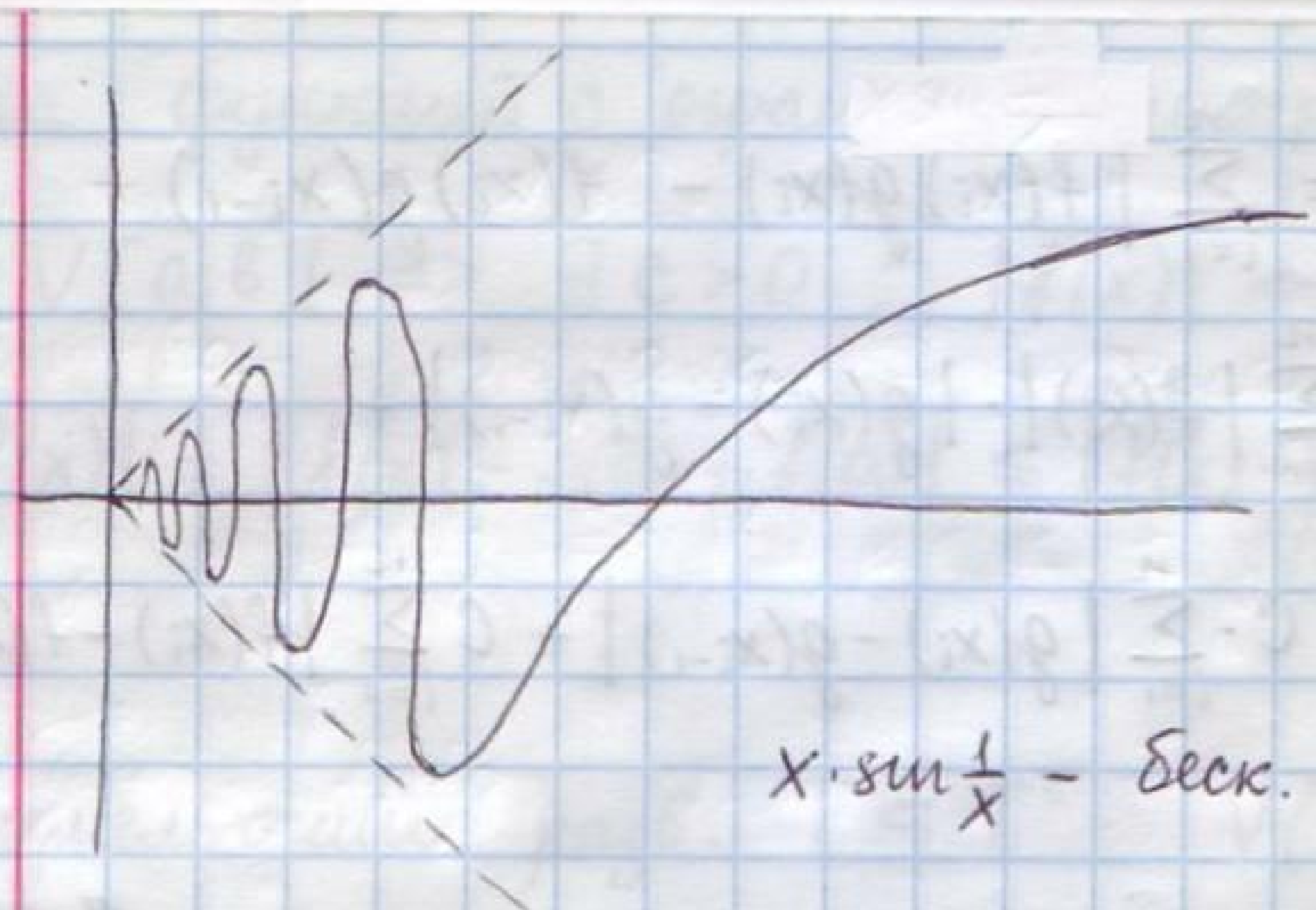
т.к. $\bigvee_{x_1}^{x_2} f(t) \geq |f(x_2) - f(x_1)|$

ч.т.д.

У функций огр. вариации с конеч. числом участков монотонности sup из опр. достигается на конкретных конечных разбиениях.



$f(x)$ – монотонна, $\bigvee_a^b f(x) = |f(b) - f(a)|$



n-й максимум модуля $\sim \frac{c}{n}$ (const)

$\sup V(f,T) \geq \sup \sum_{n=1}^{k} \frac{c}{n} \to \infty$

$x \cdot \sin\frac{1}{x}$ – беск. число участков монотонности.

Теорема. (Связь с интегралом Римана)

$f(x) \in C^1[a,b] \Rightarrow f(x) \in V[a,b]$ и $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$.

Д-во: $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi)|(x_i - x_{i-1}) \leq \max_{[a,b]} |f'(x)|(b-a) \Rightarrow f \in V[a,b]$

$\downarrow$ при измельч. разб. (т.к. $f'(x)$ непр-на $\Rightarrow$ $f'(x)$ интегрируема $\Rightarrow$ $|f'(x)|$ интегрируем $\Rightarrow$ lim $\exists$ с любой разметкой, в т.ч. и с этой)

$\int_a^b |f'(x)|\,dx$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T,\ d(T) < \delta(\varepsilon),\ \left| V(f,T) - \int_a^b |f'(x)|\,dx \right| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T^* : \ \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) - V(f,T^*) < \varepsilon$.

$T^* \subset T^{**},\ d(T^{**}) < \delta(\varepsilon)$, и $\left| \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) - \int_a^b |f'(x)|\,dx \right| < 2\varepsilon$

ч.т.д.

Спрямляемые кривые (с непр. координатами) – те, у кот. все координаты являются ф-циями огр. вариации.

$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ – длина кривой ($x = x$, $y = f(x)$), $\int_a^b |f'(x)|\,dx$ – полная вариация (берется только координата y)

Функции классов Гёльдера.

<u>Опр.</u> Пусть $f(x)$ опр-на на $[a, b]$, и $\exists \alpha \in (0, 1]$ и $\exists c > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq c \cdot |x_1 - x_2|^\alpha$. Тогда $f(x)$ наз. принадлежащей классу Гёльдера с показателем α.

<u>Обозн.</u>: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$ при $\alpha \in (0, 1)$,
для $\alpha = 1$: $f(x) \in Lip[a, b]$ – липшицева ф-ция.

<u>Теорема.</u> $f(x) \in Lip[a, b] \Rightarrow f(x) \in V[a, b]$

<u>Д-во:</u> $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} c \cdot |x_i - x_{i-1}| = c \cdot (b - a)$

ч.т.д.

<u>Задача.</u> Показать, что если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq c \cdot |x_1 - x_2|^\alpha$, $\alpha > 1$, то $f(x) = \mathrm{const}$.

<u>Замечание.</u> $f(x) \in C^{n+\alpha}[a, b]$ $(\alpha \in (0, 1])$ – означает, что $f(x)$ n раз непр-но диф-ема, а последняя ее производная – гёльдерова.

Интеграл (Римана-) Стилтьеса.

<u>Опр.</u> Пусть $f(x), g(x)$ опр-ны на $[a, b]$, $T(\xi)$ – размеч. разбиение $[a, b]$.

$\sigma_g(f, T(\xi)) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$ – интегральная сумма Стилтьеса для f по g. Если при $d(T) \to 0$

$\exists \lim\limits_{d \to 0} \sigma_g(f, T(\xi))$, то говорят, что f интегрируема по g в смысле Стилтьеса, и обозначается $\int\limits_a^b f(x) \, d\, g(x)$.

не дифференциал

25.03.15. Лекция № 10.

Свойства интеграла Стилтьеса:

① $\exists \int_a^b f_1 dg$ и $\int_a^b f_2 dg \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \exists \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg =$

$= \alpha \int_a^b f_1 dg + \beta \int_a^b f_2 dg$.

② $\exists \int_a^b f dg_1$ и $\int_a^b f dg_2 \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \exists \int_a^b f d(\alpha g_1 + \beta g_2) =$

$= \alpha \int_a^b f dg_1 + \beta \int_a^b f dg_2$.

③ Пусть $c \in (a, b)$, $\exists \int_a^b f dg$, $\exists \int_a^c f dg$, $\exists \int_c^b f dg \Rightarrow \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$.

<u>Д-во:</u> $\int_a^b f dg = \lim\limits_{\substack{d(T)\to 0 \\ \forall T(\xi)}} \sigma_g(f, T_{[a,b]}) = \lim\limits_{\substack{d(T)\to 0 \\ \forall T \ni c}} \sigma_g(f, T_{[a,b]}) =$

т.к. $\lim \exists$

$= \lim\limits_{\substack{d(T)\to 0 \\ T \ni c}} \left(\sigma_g(f, T_{[a,c]}) + \sigma_g(f, T_{[c,b]})\right) = \lim\limits_{d\to 0} \sigma_g(f, T_{[a,c]}) + \lim\limits_{d \to 0} \sigma_g(f, T_{[c,b]})$

т.к. пределы $\exists$ отдельно.

ч.т.д.

<u>Замечание 1.</u> Интеграл Стилтьеса обладает свойством интегрируемости на подотрезках (без док-ва).

(Критерий Коши:

$[c,d] \subset [a,b]$, $|\sigma_g(f, T_{[c,d]}) - \sigma_g(f, T'_{[c,d]})| =$

$= |\sigma_g(f, T_{[a,c]}) + \sigma_g(f, T_{[c,d]}) + \sigma_g(f, T_{[d,b]}) - \sigma_g(f, T_{[a,c]}) - \sigma_g(f, T'_{[c,d]}) - \sigma_g(f, T_{[d,b]})|$

$= |\sigma_g(f, T_{[a,b]}) - \sigma_g(f, T'_{[a,b]})| < \varepsilon$)

Замечание 2. $c \in (a,b)$. Если $\exists \int\limits_a^c f dg$ и $\int\limits_c^b f dg \not\Rightarrow \exists \int\limits_a^b f dg$.

Пример. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0) \\ 1, & x \in [0,1] \end{cases}$

на $[-1,0]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(\xi_i)}}(g(x_i) - g(x_{i-1})) \equiv 0$

на $[0,1]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\underset{0}{\underset{\parallel}{(g(x_i) - g(x_{i-1}))}} \equiv 0$

$x_{j-1} < 0 < x_j$

на $[-1,1]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) =$

$= f(\xi_j) \cdot 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_j \le 0 \\ 1, & \text{если } \xi_j > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \nexists$.

Теорема. (Интегрирование по частям)

$\exists \int\limits_a^b g df \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f dg$ и $\boxed{\int\limits_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g df}$.

Д-во: $\sigma_g(f,T) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = f(\xi_1)(g(x_1) - g(a)) +$

$+ f(\xi_2)(g(x_2) - g(x_1)) + \ldots + f(\xi_n)(g(b) - g(x_{n-1})) = -f(\xi_1)g(a) - g(x_1)(f(\xi_2) - f(\xi_1)) -$

$- g(x_2)(f(\xi_3) - f(\xi_2)) - \ldots - g(x_{n-1})(f(\xi_n) - f(\xi_{n-1})) + f(\xi_n)g(b) +$

$+ f(a)g(a) - f(a)g(a) + f(b)g(b) - f(b)g(b) = -g(a)(f(\xi_1) - f(a)) - g(x_1)(f(\xi_2) - f(\xi_1)) - \ldots$

$- g(x_{n-1})(f(\xi_n) - f(\xi_{n-1})) - g(b)(f(b) - f(\xi_n)) + f(b)g(b) - f(a)g(a) =$

$= -\sigma_f(g, T(\xi), \xi \cup \{a,b\}) + f(b)g(b) - f(a)g(a) \longrightarrow -\int\limits_a^b g df + f(b)g(b) - f(a)g(a)$

ч.т.д.

Теорема Если f – непрерывна, а g – ограниченной вариации на $[a,b]$, то $\exists \int\limits_a^b f dg$.

Д-во: Пусть $g\uparrow$. (если $g \in V[a,b]$, то g – разность двух неубывающих, докажем для $g\uparrow$, дальше по линейности)

$$\sigma_g(f,T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})), \quad m_i = \min_{\Delta x_i} f, \quad M_i = \max_{\Delta x_i} f \quad (\exists, \text{ т.к. } f \in C[a,b])$$

$$\underline{\underline{S}} - \overline{\overline{s}} = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) < \varepsilon(g(b) - g(a))$$

$\overset{\wedge}{\varepsilon}$ ($f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равн. непр-на на $[a,b]$)

$$\Rightarrow \sup_T \overline{\overline{s}} = \inf_T \underline{\underline{S}} = I$$ ($\exists$ sup и inf следует из взаимной ограниченности)

Т.к. $\overline{\overline{s}} \le \sigma_g(f,T) \le \underline{\underline{S}}$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T, d(T) < \delta(\varepsilon)$,

$$|\sigma_g(f,T) - I| < \varepsilon$$

ч.т.д.

Следствие 1. Из этой теоремы и из ф-лы интегрирования по частям следует, что $\exists \int\limits_a^b g df$, где $f \in C[a,b]$, $g \in V[a,b]$.

Следствие 2. Т.к. если $g \in Lip[a,b]$, то $g \in V[a,b]$, то $\exists \int\limits_a^b f dg$, где $f \in C[a,b]$, $g \in Lip[a,b]$.

Теорема $f(x) \in C[a,b]$, $g(x) \in \mathcal{D}[a,b]$, $g'(x) \in R[a,b] \Rightarrow$

$$(S)\int_a^b f dg = (R)\int_a^b f(x) g'(x) dx$$

интеграл в смысле Стилтьеса

в смысле Римана

$\int$-лы $\exists$ отдельно, это следует из условий, надо д-ть рав-во

Д-во: $\forall T_{[a,b]}$ $\quad g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ (ф-ла Лагранжа)

$\exists \int\limits_a^b f dg$, т.к. $g \in Lip[a,b]$ (т.к. $g'(x) \in R[a,b]$, то $g'(x)$ – огр-на)

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma(f\cdot g', T)$$

$\parallel$ (т.к. $\int \exists$, то можно выбирать не любую разметку, а удобную)

$\sigma_g(f, T)$

ч.т.д.

Теорема (1-я теорема о среднем для $\int$ Стилтьеса)

$f(x) \in C[a,b]$, g опр-на и $\uparrow$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\exists c \in [a,b] : \boxed{\int_a^b f dg = f(c)\cdot \int_a^b dg = f(c)(g(b)-g(a))}.$$

Д-во: $\min\limits_{[a,b]} f\cdot (g(b)-g(a)) \leq \sigma_g(f,T) \leq \max\limits_{[a,b]} f\cdot (g(b)-g(a))$

ч.т.д.

Теорема (2-я теорема о среднем для $\int$ Стилтьеса)

$f(x) \in C[a,b]$, $g(x)$ $\uparrow$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\exists c \in [a,b] : \boxed{\int_a^b g(x)\, d f(x) = g(a)(f(c)-f(a)) + g(b)(f(b)-f(c))}.$$

Д-во: $\int_a^b g(x)\, d f(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, dg(x) =$

$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - f(c)(g(b)-g(a)) = g(a)(f(c)-f(a)) + g(b)(f(b)-f(c))$.

ч.т.д.

Замечание (нестрогое)

$$\int_a^b \underset{\text{непр.}}{f(x)} \cdot \underset{\text{монотон.}}{g(x)}\, dx = \int_a^b g(x)\, d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = g(a)\int_a^c f(t)\,dt + g(b)\int_c^b f(t)\,dt$$

Задача. $f(x) \in C[a,b]$, $g(x) = \begin{cases} g(a), & x=a \\ c_1, & x\in(a,c) \\ g(c), & x=c \\ c_3, & x\in(c,b) \\ g(b), & x=b \end{cases}$ Посчитать $\int_a^b f(x)\, dg(x)$.

27.03.15. Лекция № 11.

$\mathbb{R}^n$, множества в $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\{(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)\}_{i=1}^{n}$ – базис

$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$

$\rho(\bar{x}, \bar{y})$ – расстояние, метрика

1) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$
2) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$
3) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$
4) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{z}) + \rho(\bar{z}, \bar{y})$

В $\mathbb{R}^n$ $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$.

$B_\varepsilon(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\bar{x}_0, \bar{x}) < \varepsilon\}$ – <u>ε-окрестность</u> (открытый шар)

$\mathring{B}_\varepsilon(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho(\bar{x}_0, \bar{x}) < \varepsilon\}$ – <u>проколотая ε-окрестность</u>

Внутр., внешние, гранич., предельные, точки прикосновения, открытые, замкнутые мн-ва и т.д., и соотв. док-ва – аналогично.

<u>Опр.</u> $\Pi_{\bar{a}, \bar{b}} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \ldots, n \;\; a_i \leq x_i \leq b_i\}$ – параллелепипед (замкнутый)

<u>Теорема.</u> $\{\Pi_{\bar{a}_k, \bar{b}_k}\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \;\; \Pi_{\bar{a}_{k+1}, \bar{b}_{k+1}} \subset \Pi_{\bar{a}_k, \bar{b}_k}$, $\lim\limits_{k \to \infty} \max\limits_{i=1,\ldots,n} |b_{ik} - a_{ik}| = 0$

$\Rightarrow \exists! \; \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n : \bar{\xi} \in \Pi_{\bar{a}_k, \bar{b}_k} \;\; \forall k$

<u>Д-во:</u> $\{[a_{ik}, b_{ik}]\}_{k=1}^{\infty}$. По принципу полноты Кантора $\exists! \; \xi_i \in [a_{ik}, b_{ik}] \; \forall k$,

$\Rightarrow \overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

ч.т.д.

Опр. Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. ограниченным, если $\exists M > 0 : A \subset B_M(\overline{0})$

Опр. Послед. $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ наз. сходящейся к $\overline{x}$, если
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall k > N_\varepsilon \quad \rho(\overline{x}_k, \overline{x}) < \varepsilon$.

$\leftarrow$ теорема (см. начало лекции №12)

Теорема (Больцано - Вейерштрасса)

$\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ - огр-на $\Rightarrow \exists \{\overline{x}_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ - сходящ. подпосл-ть.

Д-во: $\{x_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_{1k_{m_1}}\}_{m_1=1}^{\infty} : \exists \lim\limits_{m_1 \to \infty} x_{1k_{m_1}} = x_1$

$\{x_{2k_{m_1}}\}_{m_1=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_{2k_{m_2}}\}_{m_2=1}^{\infty} : \exists \lim\limits_{m_2 \to \infty} x_{2k_{m_2}} = x_2, \ \exists \lim\limits_{m_2 \to \infty} x_{1k_{m_2}} = x_1$

$\{x_{3k_{m_2}}\} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_{3k_{m_3}}\}$ и т.д.

$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

ч.т.д.

Опр. $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. секвенциальным компактом, если
$\forall \{\overline{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A \quad \exists \{\overline{a}_{k_m}\} : \exists \lim\limits_{m \to \infty} \overline{a}_{k_m} = \overline{a} \in A$.

Теорема. A - секвенциальный компакт $\Leftrightarrow$ A замкнуто и ограничено.

Д-во: ($\Rightarrow$) Пусть A - неогр.: $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \overline{x}_k \in A, \ \|\overline{x}_k\| > k \Rightarrow$
$\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет сход. подпосл-ти. Противоречие $\Rightarrow$ A - ограничено.

Пусть $\overline{a}$ - точка прикосн. A, $\forall k \in \mathbb{N} \quad B_{\frac{1}{k}}(\overline{a}) \cap A \ni a_k \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \overline{a}_k = \overline{a} \in A$

$\Rightarrow$ A содержит все свои точки прикосновения $\Rightarrow$ A - замкнуто.

($\Leftarrow$) Берем $\forall$ послед., она огр-на $\Rightarrow \exists$ сход. подпосл-ть $\Rightarrow \lim \in A$.

ч.т.д.

Теорема A - секв. компакт $\Leftrightarrow \forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in\alpha} \supset A \;\; \exists \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{k} \supset A$.

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $\exists \{U_\alpha\}_{\alpha\in\alpha}$ такое, что нельзя выделить конеч.

A огр-но $\Rightarrow \exists \Pi_{\bar{a},\bar{a}+\bar{d}} \supset A$, $\bar{d} = (d,\dots,d)$. $\forall i = 1,\dots,n$

$[a_i, a_i + \frac{d}{2}]$, $[a_i + \frac{d}{2}, a_i + d] \rightarrow$ разб. куб на 2^n частей.

$\exists$ куб из 2^n, что часть A, лежащая в нем, не имеет конечного подпокр. из $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\alpha}$. И т.д.

$\exists!\, \xi \in$ всем кубам, но $\xi \in U_\alpha$ для нек. $\alpha\in\alpha \Rightarrow \exists B_\delta(\xi) \subset U_\alpha$,

но $\exists$ куб $\subset B_\delta(\xi)$.

$\Leftarrow$ Пусть $\{\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ не имеет сходящ. к элементу A подпослед-ти.

$\Rightarrow \forall \bar{x}\in A \;\; \exists B(\bar{x}) : \; B(\bar{x}) \cap \{\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ - конечно

$A \subset \bigcup\limits_{\bar{x}\in A} B(\bar{x}) \Rightarrow A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B(\bar{x}_i) \Rightarrow A$ - конечно - противоречие.

ч.т.д.

Опр. $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\rho(A,B) = \inf\limits_{\bar{x}\in A, \bar{y}\in B} \rho(\bar{x},\bar{y})$.

Теорема. $A, B \subset \mathbb{R}^n$, A, B - замкн., A - огр-но, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \rho(A,B) > 0$.

Д-во: Предположим, что $\rho(A,B) = 0$. Тогда $\exists \{\bar{x}_n\} \subset A$, $\{\bar{y}_n\} \subset B$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 0$. $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ - огр-на $\Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} \bar{x}_{n_m} = \bar{x} \in A$,

но $\rho(\bar{x}, \bar{y}_{n_m}) \le \rho(\bar{x}, \bar{x}_{n_m}) + \rho(\bar{x}_{n_m}, \bar{y}_{n_m}) < 2\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \bar{y}_{n_m} = \bar{x} \in B$

$\bar{x}\in A$ и $\bar{x}\in B$ - противоречие с $A \cap B = \varnothing$.

ч.т.д.

Теорема $A \subset \mathbb{R}^n$ - замкн., $\bar{x} \notin A \Rightarrow \exists \bar{y}\in A : \rho(\bar{x}, A) = \rho(\bar{x}, \bar{y})$.

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \overline{y}_\varepsilon \in A: \ \rho(\overline{x}, \overline{y}_\varepsilon) < \rho(\overline{x}, A) + \varepsilon$

$\Rightarrow \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A: \ \rho(\overline{x}, \overline{y}_k) < \rho(\overline{x}, A) + \frac{1}{k} \Rightarrow \{\overline{y}_k\}$ – огр-на $\Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{m\to\infty} \overline{y}_{k_m} = \overline{y}$.

$$\rho(\overline{x}, \overline{y}_{k_m}) < \rho(\overline{x}, A) + \frac{1}{k_m}$$

$$\big\downarrow m \to \infty$$

$$\rho(\overline{x}, \overline{y}) \le \rho(\overline{x}, A)$$

Но $\forall\, \overline{y} \in A \quad \rho(\overline{x}, \overline{y}) \ge \rho(\overline{x}, A)$

ч.т.д.

Опр. $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. линейно связным, если $\forall\, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in A \ \exists\, \gamma(t):$ $[0,1] \to \mathbb{R}^n$, что $\gamma(0) = \overline{x}_1$, $\gamma(1) = \overline{x}_2$ и $\gamma(t) \subset A$. (γ – непр.)

Теорема. $A \subset \mathbb{R}^n$ – лин. связно, $A \cap B \ne \varnothing$ и $A \cap \{\mathbb{R}^n \setminus B\} \ne \varnothing \Rightarrow$ $A \cap \partial B \ne \varnothing$.

Д-во: $\overline{x}_1 \in A \cap B$, $\overline{x}_2 \in A \cap \{\mathbb{R}^n \setminus B\}$, $\gamma(t) \subset A: \gamma(0) = \overline{x}_1, \ \gamma(1) = \overline{x}_2$.

$\tau = \sup\limits_{t \in [0,1]} \{t : \gamma(t) \in B\}$, $\forall\, t > \tau \quad \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus B$,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, t \in (\tau - \varepsilon, \tau): \gamma(t) \in B \Rightarrow \gamma(\tau) \in \partial B$.

ч.т.д.

Опр. Открытое лин. связное подмн-во $\mathbb{R}^n$ наз. областью в $\mathbb{R}^n$

Замкнутое . . . . . . – замкнутой областью в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Иногда в опр. добавляют слово ограниченная

01.04.15. Лекция N 12.

Теорема. $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \iff \forall i=1,\dots,n \ \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{ik} = x_i$, $\overline{x}_k = (x_{1k},\dots,x_{nk})$
$\overline{x} = (x_1,\dots,x_n)$.

Д-во: $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall k>N_\varepsilon \ \|\overline{x}_n - \overline{x}\| < \varepsilon$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-x_i)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i=1,\dots,n \ |x_{ik}-x_i| < \sqrt{} < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon>0 \ \exists N_{\varepsilon i} \ \forall k>N_{\varepsilon i} \ |x_{ik}-x_i|<\varepsilon$. $N_\varepsilon = \max\limits_{i=1,\dots,n}\{N_{\varepsilon 1},\dots,N_{\varepsilon n}\}$,

$$\forall k>N_\varepsilon \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-x_i)^2} \le \sum_{i=1}^{n}|x_{ik}-x_i| < n\varepsilon.$$

ч.т.д.

Функции в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Отобр. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ наз. **функцией n переменных**.

$y = f(x_1,\dots,x_n)$

$D(f)$, $R(f)$ — $\{(\overline{x},y) : \overline{x}\in D(f), y\in R(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — график

$D(f)$ — обл. определения, $R(f)$ — обл. значений

Опр. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ наз. **ограниченной**, если $\exists M>0 : \forall \overline{x}\in D(f) \ |f(\overline{x})|<M$.

Опр. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\forall c\in R(f)$ $\{\overline{x} : f(\overline{x}) = c\}$ наз. **поверхностью уровня** (в 2-мерном случае говорят линия уровня)

Опр. (Гейне) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\overline{a}$ — пред. точка $D(f)$. Если $\exists A\in\mathbb{R}$:
$\forall \{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}\subset D(f)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{x}_k = \overline{a}$, $\overline{x}_k\ne\overline{a}$, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) = A$, то говорят, что число A явл. **пределом $f(x)$ в т. $\overline{a}$** ($\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = A$)

Опр. (Коши) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\overline{a}$ — пред. точка $D(f)$. Если $\exists A\in\mathbb{R}$:
$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon)>0 \ \forall\overline{x}\in B'_{\delta(\varepsilon)}(\overline{a})\cap D(f) \ |f(\overline{x})-A|<\varepsilon$, то говорят, что число A явл. **пределом $f(x)$ в т. $\overline{a}$** ($\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = A$)

Все свойства предела ф-ции (включая теорему об эквив-ти опр, крит. Коши, арифм. св-ва и т.д.) док-ются так же, как и в случае одной переменной.

Есть опр. предела по мн-ву. Частный случай предела по подмн-ву:

<u>Опр.</u> $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(t): [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – непр. кривая, $\gamma(t) \subset D(f)$, $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$. Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall t \in B'_{\delta(\varepsilon)}(t_0) \ |f(\gamma(t)) - A| < \varepsilon$, то говорят, что A явл. **пределом $f(x)$ вдоль кривой γ в т. x_0**

$$\lim_{\substack{\overline{x} \to x_0, \\ \overline{x} \in \gamma(t)}} f(\overline{x}) = A$$

<u>Опр.</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ – биекция (перестановка), $i_k = \sigma(k)$.

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{0i_1}} \left(\lim_{x_{i_2} \to x_{0i_2}} \left(\lim_{x_{i_3} \to x_{0i_3}} \left(\dots \left(\lim_{x_{i_n} \to x_{0i_n}} f(x_1, \dots, x_n) \right)\right)\right)\right)$$ – **повторный предел** $f(\overline{x})$ в т. $\overline{x}_0$ (по перестановке σ).

эта штука может $\exists$, даже если $\lim f \not\exists$, и наоборот.

Теорема $\exists \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = A$ и $\exists \lim\limits_{x_{i_2} \to x_{0i_2}} \left(\lim\limits_{x_{i_3} \to x_{0i_3}} \left(\dots \left(\lim\limits_{x_{i_n} \to x_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n) \right)\right)\right) = f_{i_1}(x_1)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x_{i_1} \to x_{0i_1}} f_{i_1}(x_1) = A$.

<u>Д-во:</u> $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \overline{x} \in B'_{\delta(\varepsilon)}(\overline{x}_0) \ |f(\overline{x}) - A| < \varepsilon \Rightarrow |f_{i_1}(x_1) - A| \leq \varepsilon$

т.к. $\exists$ повт. предел, делаем предельный переход.

ч.т.д.

<u>Примеры:</u> 1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$

$$\lim_{\substack{x,y \to 0, \\ y=0 \text{ или } x=0}} f(x,y) = 0, \quad \lim_{\substack{x,y \to 0, \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{x,y \to 0, \\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = 0 \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \not\exists$$

2. $f(x,y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ или } y = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad (f(x,y) < |x|+|y|)$, $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) \nexists$

Непрерывные функции.

Опр. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \overline{x} \in B_{\delta(\varepsilon)}(\overline{x_0}) \; |f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})| < \varepsilon \Rightarrow$

$f(\overline{x})$ непрерывна в т. $\overline{x_0}$

Локальные св-ва непр. функций док-ются так же, как в одномерном случае.

Теорема (непрерывность композиции)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $B_\delta(\overline{x_0}) \subset D(f)$, $f(\overline{x})$ непр-на в т. $\overline{x_0}$, $\forall i = 1,\dots,n$

$x_i: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $B_{\delta_i}(\overline{t_0}) \subset D(x_i)$, x_i непр-ны в т. $\overline{t_0}$, $x_i(\overline{t_0}) = x_{0i}$

$\Rightarrow f(x_1(t_1,\dots,t_k),\dots,x_n(t_1,\dots,t_k))$ непр-на в т. $\overline{t_0}$.

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \overline{x} \in B_{\delta(\varepsilon)}(\overline{x_0}) \; |f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})| < \varepsilon$

$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, что $\Pi_{\overline{x_0} - \overline{\delta_1(\varepsilon)}, \overline{x_0} + \overline{\delta_1(\varepsilon)}} \subset B_{\delta(\varepsilon)}(\overline{x_0}) \Rightarrow$

$\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, что $\forall i = 1,\dots,n$ при $\overline{t} \in B_{\delta_2(\varepsilon)}(\overline{t_0})$ $x_i \in (x_{0i} - \delta_1(\varepsilon), x_{0i} + \delta_1(\varepsilon))$

(т.к. x_i непр-ные). $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \; \forall \overline{t} \in B_{\delta_2(\varepsilon)}(\overline{t_0}) \; |f(\overline{x}(\overline{t})) - f(\overline{x_0})| < \varepsilon$.

ч.т.д.

Глобальные св-ва.

Теорема (Вейерштрасс)

$f(x) \in C(K)$, $K \in \mathbb{R}^n$ - компакт $\Rightarrow f(x)$ огр-на на K и достигает свои inf и sup.

Д-во: 1) Предп., что f неогр-на $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \; \exists \overline{x}_k \in K : |f(\overline{x}_k)| > k$,

т.к. K-компакт, то $\exists \{\overline{x}_{k_l}\} : \lim\limits_{l\to\infty} \overline{x}_{k_l} = \overline{x} \in K$, но $f \in C(K) \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{l\to\infty} f(\overline{x}_{k_l}) = f(\overline{x})$, противоречие $\Rightarrow f$ - огр-на.

2) f-огр-на $\Rightarrow \exists M = \sup\limits_{\bar{x} \in K} f(\bar{x}) \Rightarrow \exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in K : f(\bar{x}_k) > M - \frac{1}{k}$

$\exists \{\bar{x}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty} : \lim\limits_{l\to\infty} \bar{x}_{k_l} = \bar{x}$ и $\lim\limits_{l\to\infty} f(\bar{x}_{k_l}) = f(\bar{x}) = M$. inf - аналогично.

ч.т.д.

Опр. Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \bar{x}', \bar{x}'' \in A \subset D(f)$, $|\bar{x}' - \bar{x}''| < \delta(\varepsilon)$, $|f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| < \varepsilon$, то $f(x)$ равномерно непр-на на A.

Теорема (Кантор)

$f(\bar{x}) \in C(K)$, K - компакт $\Rightarrow f(\bar{x})$ равн. непр-на на K.

Д-во: От противного. Пусть $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x', x''$, $|\bar{x}' - \bar{x}''| < \delta$, $|f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| \geq \varepsilon_0$. Берем $\{\bar{x}_k'\}, \{\bar{x}_k''\} : |\bar{x}_k' - \bar{x}_k''| < \frac{1}{k}$, но $|f(\bar{x}_k') - f(\bar{x}_k'')| \geq \varepsilon_0$

$\exists \{\bar{x}_{k_l}'\} : \lim\limits_{l\to\infty} \bar{x}_{k_l}' = \bar{x}'$. $\|\bar{x}' - \bar{x}_{k_l}''\| \leq \|\bar{x}' - \bar{x}_{k_l}'\| + \|\bar{x}_{k_l}' - \bar{x}_{k_l}''\| < \varepsilon + \frac{1}{k_l}$

$\Rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} \bar{\bar{x}}_{k_l}'' = \bar{x}'$. Противоречие ($\lim \bar{x}_{k_l}' = \lim \bar{x}_{k_l}''$, но $|f(\bar{x}_{k_l}') - f(\bar{x}_{k_l}'')| \geq \varepsilon_0$)

ч.т.д.

Теорема. $A \subset \mathbb{R}^n$ - лин. связно, $f \in C(A)$, $f(\bar{x}_1) = a$, $f(\bar{x}_2) = b$, $a < c < b$ ($b < c < a$) $\Rightarrow \exists \bar{x}' \in A : f(\bar{x}') = c$.

Д-во: Пусть $\gamma(t) : \gamma(0) = \bar{x}_2$, $\gamma(1) = \bar{x}_2$, $\gamma(t) \subset A \Rightarrow$ ($\gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$) непр. кривая.
$\exists t' : f(\gamma(t)) = c$, $\gamma(t') = x'$.

ч.т.д.

03.04.15. Лекция №13.

Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$.

<u>Опр.</u> Пусть $f(\overline{x})$ опр-на в $B(x_0)$. Если $\exists$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i} + \Delta x_i, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0i}, \ldots, x_{0n})}{\Delta x_i} = f'_{x_i}(\overline{x_0}) = f'_{x_i}(\overline{x})\Big|_{\overline{x_0}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})$$

то говорят, что f имеет частную производную по перем. x_i в т. $\overline{x_0}$.

<u>Пример.</u> $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x=0 \text{ или } y=0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0 \qquad \left(\frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \equiv 0 \right)$$

Но ф-ция разрывна в т. $(0,0)$.

<u>Опр.</u> Пусть $f(\overline{x})$ опр-на в $B(\overline{x_0})$ и $\exists\, f'_{x_i}(\overline{x})$ в $B(\overline{x_0})$. Тогда, если $\exists\, (f'_{x_i})'_{x_i}$ в т. $\overline{x_0}$, то $(f'_{x_i})'_{x_i}$ наз. второй част. производной f по перем. x_i в т. $\overline{x_0}$ (обозн.: $f''_{x_i x_i}$, $f''_{x_i^2}$ - встречается, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$)

Если $\exists\, (f'_{x_i})'_{x_j}$, то наз. 2-й смешанной производной по перем. x_i, x_j, и обозн. $f''_{x_i x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Аналогично определяются производные других порядков.

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x_{11}^3\, \partial x_1\, \partial x_2^3\, \partial x_3^2\, \partial x_1}$$

<u>Опр.</u> Пусть $f(\overline{x})$ опр-на в $B(\overline{x_0})$. Если $\exists\, \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$: $\forall \overline{x} \in B(\overline{x_0})$

$f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = \sum\limits_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \overline{o}(\rho(\overline{x}, \overline{x_0}))$ при $\overline{x} \to \overline{x_0}$, то ф-ция наз. дифференцируемой в т. $\overline{x_0}$, а главная лин. часть приращения наз. 1-м дифференциалом: $df = \sum\limits_{i=1}^n A_i \Delta x_i$.

линейная форма

Теорема $f(\overline{x})$ диф-ема в т. $\overline{x_0}$ $\Rightarrow$ $f(\overline{x})$ непр-на в т. $\overline{x_0}$

Д-во: $\left|f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \overline{\overline{o}}(\rho(\overline{x}, \overline{x_0}))\right| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$, т.к. $|\Delta x_i| \le \rho(\overline{x}, \overline{x_0})$

ч.т.д.

Теорема $f(\overline{x})$ диф-ема в т. $\overline{x_0}$ $\Rightarrow$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\exists f'_{x_i}(\overline{x_0})$ и $A_i = f'_{x_i}(\overline{x_0})$.

Д-во: $$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + \Delta x_i, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n})}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \overline{\overline{o}}(\rho(\overline{x}, \overline{x_0}))}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{A_i \Delta x_i + \overline{\overline{o}}(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i} = A_i$$

ч.т.д.

Теорема. $f(\overline{x})$ опр-на и непр-на в $B(\overline{x_0})$, $\forall i$ $\exists f'_{x_i}(\overline{x})$ в $B(\overline{x_0})$,
и $\forall i$ $f'_{x_i}(\overline{x}) \in C(B(\overline{x_0}))$ $\Rightarrow$ $f(\overline{x})$ диф-ема в т. $\overline{x_0}$.

Д-во: в $\mathbb{R}^2$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$= f'_x(x + \underset{(0,1)}{\theta_1} \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \underset{(0,1)}{\theta_2} \Delta y)\Delta y =$$ (т.к. f'_x и f'_y непр-ны в $B(\overline{x_0})$)

ф-ла Лагранжа

$$= (f'_x(x,y) + \overline{\overline{o}}(1))\Delta x + (f'_y(x,y) + \overline{\overline{o}}(1))\Delta y, \text{ при } \rho \to 0$$

$$f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \overline{\overline{o}}(1)\Delta x + \overline{\overline{o}}(1)\Delta y, \quad \rho \to 0.$$

Т.к. $|\Delta x| \le \rho$, $|\Delta y| \le \rho$, то $\dfrac{\overline{\overline{o}}(1)\Delta x + \overline{\overline{o}}(1)\Delta y}{\rho} \to 0$, т.е. числитель $= \overline{\overline{o}}(\rho)$

ч.т.д.

Градиент и производная по направлению.

Опр. Пусть $f(\overline{x})$ имеет част. произв. f'_{x_i} $\forall i$ в $\Omega \subset R^n$ – область

Тогда $\underline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}$ – **градиент** ($grad\, f$, $\underset{\text{набла}}{\nabla f}$)

Опр. Пусть $f(\overline{x})$ опр-на в $B(\overline{x_0})$, $\overline{l} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, $\|\overline{l}\| = 1$

направляющие косинусы (cos углов до осей)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_{01} + \Delta t\cos\alpha_1, \dots, x_{0n} + \Delta t\cos\alpha_n) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial \overline{l}}(\overline{x_0})$$

Если $\lim \exists$, то наз. **производной** $f(\overline{x})$ в т. $\overline{x_0}$ **по направлению** $\overline{l}$.

Теорема. $f(\overline{x})$ опр-на в $B(\overline{x_0})$, диф-ема в т. $\overline{x_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{l}}(\overline{x_0}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})\cos\alpha_i = (\nabla f, \overline{l})}$

Д-во: $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_{01} + \Delta t\cos\alpha_1, \dots, x_{0n} + \Delta t\cos\alpha_n) - f(\overline{x_0})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})\Delta t\cos\alpha_i + \overline{o}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta t^2\cos^2\alpha_i}\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})\cos\alpha_i + \overline{o}(1)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})\cos\alpha_i = (\nabla f, \overline{l})$$ – скалярное произведение

ч.т.д.

Теорема. $f(\overline{x})$ диф-ема в $B(\overline{x_0})$ $\Rightarrow$ производная по напр. $grad\, f(\overline{x_0})$ явл. наибольшей по модулю среди всех произв. по направл.

Д-во: $\forall\, \overline{l}$ $\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{l}}\right| = |(grad\, f, \overline{l})| \leq \|grad\, f\| \cdot 1$ – ограничение значений производных по направлениям

$\overline{l'} = \frac{grad\, f}{\|grad\, f\|}$: $\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{l'}}\right| = \left|\left(grad\, f, \frac{grad\, f}{\|grad\, f\|}\right)\right| = \|grad\, f\|$ – получили наиб. возможн. значение

ч.т.д.

Лекция №14. 15.04.15.

Геометрический смысл 1-го дифференциала.

Опр. Пусть $f(\bar{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $B(\bar{x}_0) \subset D(f)$. Плоскость $\sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i(x_i - x_{0i}) = 0$, где $(x_{01}, \dots, x_{0n}, x_{0,n+1}) = (\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$, наз. касательной плоскостью к графику ф-ции $f(\bar{x})$ в т. $\bar{x}_0$, если $\forall$ прямой l, проходящей через т. $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ и $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, $\bar{x} \in B(\bar{x}_0)$, угол между l и нормалью к плоскости $\to$ к $\frac{\pi}{2}$ при $\bar{x} \to \bar{x}_0$.

Теорема $f(\bar{x})$ диф-ема в $B(\bar{x}_0)$ $\Rightarrow$ $y - y_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)(x_i - x_{0i})$, $y_0 = f(\bar{x}_0)$, явл. касательной плоскостью.

Д-во: l: $(x_{01} + (x_1 - x_{01})t, \dots, x_{0n} + (x_n - x_{0n})t, f(\bar{x}_0) + (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0))t)$, $t \in \mathbb{R}$

секущая

$$\cos\alpha = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) + (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)) \cdot (-1)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)\right)^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})^2 + (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0))^2}} = \frac{\bar{\bar{o}}(\rho)}{\sqrt{1 + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}\sqrt{\rho^2 + (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0))^2}} \quad (*)$$

$$|(*)| \leq \text{const} \cdot \frac{|\bar{\bar{o}}(\rho)|}{\rho} \to 0 \Rightarrow \alpha \to \frac{\pi}{2}.$$

ч.т.д.

Инвариантность формы 1-го дифференциала.

Теорема $f(\bar{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x})$ диф-ема в $B(\bar{x}_0)$. Пусть $\forall i = 1, \dots, n$ $x_i(\bar{t}): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $x_i(t)$ диф-емы в $B'(\bar{t}_0)$ и $\forall \bar{t} \in B'(\bar{t}_0)$ $(x_1(\bar{t}), \dots, x_n(\bar{t})) = \bar{x}(\bar{t}) \in B(\bar{x}_0)$, $\bar{x}(\bar{t}_0) = \bar{x}_0$.

Тогда $f(\bar{x}(\bar{t})): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ диф-ема в $\bar{t}_0$ и

$$df(\bar{x}(\bar{t})) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_j}\right)\Bigg|_{\bar{t}=\bar{t}_0} \cdot dt_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i}(\bar{t}_0) \cdot dt_i.$$

$\underline{Д\text{-}во:}$ $f(\bar{x}(\bar{t})) - f(\bar{x}(\bar{t}_0)) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} (x_j(\bar{t}) - x_j(\bar{t}_0)) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j(\bar{t}) - x_j(\bar{t}_0))^2}\right) =$

то же, что и $\bar{t}=\bar{t}_0$

при $\sqrt{\;} \to 0$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0} \cdot (t_i - t_{0i}) + \bar{\bar{o}}(\overset{\sqrt{\sum(t_i-t_{i0})^2}}{\rho})\right) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0}(t_i - t_{i0}) + \bar{\bar{o}}(\rho)\right)^2}\right) =$$

разные ρ для разных j

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\right)\Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0} \cdot \Delta t_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0} \cdot \bar{\bar{o}}(\rho) + \bar{\bar{o}}(\rho)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\Delta t_i + \bar{\bar{o}}(\rho)\right| \le \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \rho + |\bar{\bar{o}}(\rho)| \le c \cdot \rho$$

ч.т.д.

$\underline{Следствие.}$ Получена ф-ла для производной сложной ф-ции.

Производные и дифференциалы старших порядков.

$\underline{Опр.}$ Если $f(\bar{x})$ диф-ема в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $f(\bar{x}) \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Если $f(\bar{x}) \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $\forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(\Omega)$, то $f(\bar{x}) \in C^1(\Omega)$.

Если $f(\bar{x}) \in C^1(\Omega)$ и $\forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\Omega)$, то $f(\bar{x}) \in \mathcal{D}^2(\Omega)$.

И т.д.

$\underline{Теорема}$ (О равенстве смешанных производных) (для плоскости)

$f(\bar{x}) \in C^1(B(\bar{x}_0))$, $B(\bar{x}_0) \subset \mathbb{R}^2$. $\exists\, f''_{xy}(\bar{x})$ и $f''_{yx}(\bar{x})$ в окр-ти т. $\bar{x}_0$ и они непр-ны в т. $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$

$\Rightarrow f''_{xy}(\bar{x}_0) = f''_{yx}(\bar{x}_0)$.

$\underline{Д\text{-}во:}$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_y f(x,y) &= f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ \Delta_x f(x,y) &= f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \end{aligned}\right\} \text{обозначение}$$

$\Delta_y(\Delta_x f(x,y)) = \Delta_x(\Delta_y f(x,y))$ (проверить!)

ф-ла Лагранжа

$$\Delta_y(\Delta_x f(x_0,y_0)) = \Delta_y(f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)) = \Delta_y(f'_x(x_0 + \underset{\in [0,1]}{\theta_1}\Delta x, y_0)\cdot \Delta x) =$$

$$= f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\cdot\Delta x = f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta x\Delta y.$$

$\Delta_x(\Delta_y f(x_0,y_0)) = f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,\ y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y$.

$\Rightarrow \forall \Delta x, \Delta y \ \exists \theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4 \in [0,1] : f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,\ y_0+\theta_4\Delta y) =$

$= f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)$, и при $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$,

т.к. f''_{xy} и f''_{yx} непр-ны в т. (x_0,y_0).

ч.т.д.

<u>Замечание</u>. Пусть $f(\overline{x}): \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Если в т. $\overline{x}_0$ для каких-то x_i и x_j выполнено условие теоремы (при фикс. остальных перем.), то $f''_{x_jx_i}(\overline{x}_0) = f''_{x_ix_j}(\overline{x}_0)$. Если для f'_{x_i} вып. условие теоремы по x_j, x_k, то $(f'_{x_i})''_{x_jx_k} = (f'_{x_i})''_{x_kx_j}$.

<u>Опр</u>. Пусть $f(\overline{x})\in C^2(B(\overline{x}_0))$. $df(\overline{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i$, ф-ция 2n переменных $(x_i, \Delta x_i)$

рассмотрим 1-й диф-ал как ф-цию n переменных (при фикс. Δx_i)

$$\delta(df(\overline{x}))\Big|_{\overline{x}=\overline{x}_0} = \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\overline{x})\cdot\delta x_j\Big)\Delta x_i\Big|_{\overline{x}=\overline{x}_0} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\overline{x}_0)\,\delta x_j\,\Delta x_i.$$

Получена БФ на касательной плоскости и соответствующая ей КВ.Ф. наз. **2-м дифференциалом**.

$$d^2 f(\overline{x}_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\overline{x}_0)\,dx_i\,dx_j \quad (\text{берем } \Delta x_i = \delta x_i)$$

Аналогично, $d^k f(\overline{x}_0) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(\overline{x}_0)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$

$\sum_{i=1}^n \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Delta x_i$

17.04.15. Лекция N 15.

Теорема. (Ф-ла Тейлора с ост. членом в ф. Лагранжа)

$f(\overline{x}) \in C^m(B(\overline{x_0})),\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \forall \overline{x} \in B(\overline{x_0})\ \exists\ \theta \in (0,1):$

$$\boxed{f(\overline{x}) = f(\overline{x_0}) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(\overline{x_0}) + \frac{1}{m!} d^m f(\overline{x_0} + \theta(\overline{x} - \overline{x_0}))}$$

Д-во: Пусть $\varphi(t) = f(\overline{x_0} + t(\overline{x} - \overline{x_0})) = f(x_{01} + t\Delta x_1, \dots, x_{0n} + t\Delta x_n)$

$\varphi(t) \in C^m[0,1]$. Ф-ла Тейлора для $\varphi(t)$ с центром разлож. в 0:

$$\underbrace{\varphi(1)}_{f(\overline{x})} = \underbrace{\varphi(0)}_{f(\overline{x_0})} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\cdot(1-0)^k + \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0 + \theta(1-0))\cdot(1-0)^m$$

$$\varphi^{(k)}(t) = (\varphi'(t))^{(k-1)} = \left(\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\overline{x_0} + t\overline{\Delta x})\cdot(x_{0i_1} + t\Delta x_{i_1})'_t\right)^{(k-1)} = \left(\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\overline{x_0} + t\overline{\Delta x})\Delta x_{i_1}\right)^{(k-1)} =$$

$$= \left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(\overline{x_0} + t\overline{\Delta x})\Delta x_{i_2}\right)\Delta x_{i_1}\right)^{(k-2)} = \dots \text{ и т.д.}$$

$$\Rightarrow \varphi^{(k)}(t) = d^k f(\overline{x_0} + t\overline{\Delta x}) \quad (\varphi^{(k)}(0) = d^k f(\overline{x_0}))$$

ч.т.д.

Замечание. Д-во верно $\forall$ выпуклой области, содержащей т. $\overline{x_0}$.

Теорема. (Ф-ла Тейлора с ост. членом в ф. Пеано)

$$f(\overline{x}) \in C^m(B(\overline{x_0})) \Rightarrow \boxed{f(\overline{x}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(\overline{x_0}) + \bar{\bar{o}}(\rho^m)},\ \rho(\overline{x}, \overline{x_0}) \to 0.$$

Д-во: Из пред. теоремы:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x_0}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(\overline{x_0}) + \underbrace{\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial^m f(\overline{x_0} + \theta\overline{\Delta x})}{\partial x_{i_n}\dots\partial x_{i_1}} - \frac{\partial^m f(\overline{x_0})}{\partial_{i_n}\dots\partial x_{i_1}}\right)}_{a} \Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_n}}$$

т.к. $\left|\dfrac{\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_n}}{\rho^m}\right| = \underline{O}(1)$, $a = \bar{\bar{o}}(1)$ при $\rho \to 0$,
(в силу непр-ти m-ых произв.)

то все вместе является $\bar{\bar{o}}(\rho^m)$.

ч.т.д.

Экстремумы функций мн. переменных

<u>Опр.</u> Пусть $f(\overline{x})$ опр-на в $B(\overline{x_0})$ и $\forall \overline{x} \in \overset{\circ}{B_\delta}(\overline{x_0})$ $f(\overline{x}) > f(\overline{x_0})$ $\left(f(\overline{x}) < f(\overline{x_0})\right)$.

Тогда говорят, что $f(\overline{x})$ имеет (строгий) **min** (**max**) в т. $\overline{x_0}$

<u>Теорема</u> (необходимое условие $\exists$ экстремума)

$f(\overline{x})$ имеет в т. $\overline{x_0}$ лок. экстремум $\Rightarrow$ если для нек. i $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0}) = 0$. Если $f(\overline{x}) \in \mathcal{D}(B(\overline{x_0}))$, то $df(\overline{x_0}) \equiv 0$.

<u>Д-во:</u> Если $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})$, то рассм. $g(t) = f(x_{01}, \dots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \dots, x_{0n})$.

Известно, что $g'(x_{0i}) = 0$, а это и есть част. производная.

Если $f(\overline{x}) \in \mathcal{D}(B(\overline{x_0}))$, то $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})$ $\forall i$, тогда $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0}) = 0 \Rightarrow df(\overline{x_0}) \equiv 0$.

ч.т.д.

<u>Теорема</u> (достаточное условие $\exists$ экстремума)

$f(\overline{x}) \in C^2(B(\overline{x_0}))$, $df(\overline{x_0}) \equiv 0$ $\Rightarrow$ если $d^2f(\overline{x_0}) > 0$ (<0) (положительно или отрицательно определенная кв.ф.), то $f(\overline{x})$ имеет в т. $\overline{x_0}$ min (max).

Если $\exists \overline{\Delta x'}$ и $\overline{\Delta x''}$ такие, что $d^2f(\overline{x_0})\big|_{\overline{\Delta x} = \overline{\Delta x'}} > 0$, $d^2f(\overline{x_0})\big|_{\overline{\Delta x} = \overline{\Delta x''}} < 0$, то экстремума нет.

<u>Д-во:</u> 1) Пусть $d^2f(x_0) > 0$.

Ф-ла Тейлора: $f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = \frac{1}{2} d^2 f(\overline{x_0}) + \overline{o}(\rho^2)$, $\rho \to 0$

$$\left\|\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\rho}\right)\right\| = 1$$

кв.ф. везде >0, а все вектора лежат на единичной сфере, значит это непр. ф-ция на единичной сфере (компакте) $\Rightarrow$ достигает своего $\min > 0$.

$$\frac{\frac{1}{2} d^2 f(\overline{x_0})}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{x_0})}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} \geqslant \alpha > 0$$

$$\frac{f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})}{\rho^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 f(\overline{x_0})}{\rho^2} + \overline{o}(1) \geqslant \frac{\alpha}{2}$$ (для всех достаточно малых ρ).

2) $d^2f(x_0) < 0$ – аналогично.

3) Пусть $\exists \Delta x'$ и $\Delta x''$, что $d^2f(\overline{x_0})\big|_{\overline{\Delta x} = \overline{\Delta x'}} = -a^2 < 0$, $d^2f(\overline{x_0})\big|_{\overline{\Delta x} = \overline{\Delta x''}} = b^2 > 0$

Тогда $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad d^2 f(\overline{x}_0)\Big|_{\overline{\Delta x} = \frac{\overline{\Delta x}'}{t}} = -\frac{a^2}{t^2}$, $d^2 f(\overline{x}_0)\Big|_{\overline{\Delta x} = \frac{\overline{\Delta x}''}{t}} = \frac{b^2}{t^2}$.

$f(\overline{x}_0 + \frac{\overline{\Delta x}'}{t}) - f(\overline{x}_0) = -\frac{a^2}{t^2} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, и при $t \to \infty$ получим

$f(\overline{x}_0 + \frac{\overline{\Delta x}'}{t}) - f(\overline{x}_0) < 0$. Аналогично, $f(\overline{x}_0 + \frac{\overline{\Delta x}''}{t}) - f(\overline{x}_0) > 0$.

ч.т.д.

Неявные функции.

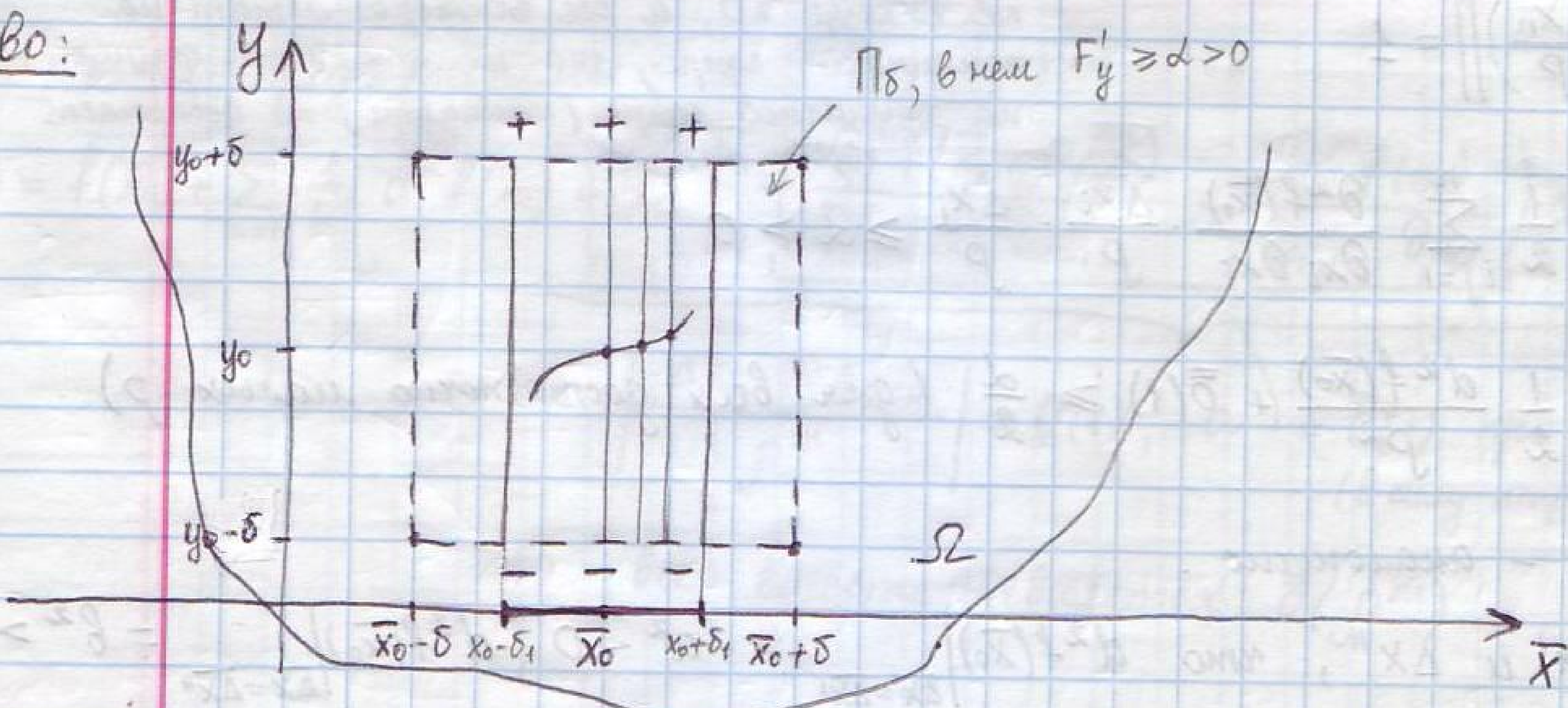
Опр. Пусть $F(\overline{x}, y)$ опр-на в $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, пусть $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ – проекция Ω на $\mathbb{R}^n$ вдоль y. Если $\exists$ ф-ция $y = f(\overline{x})$, определенная на $A \subset \Omega_x$ такая, что $F(\overline{x}, f(\overline{x})) \equiv 0$ на A, то говорят, что уравнение $F(\overline{x}, y) = 0$ определяет **неявно заданную функцию** $y = f(x)$.

Теорема (о неявной функции)

$F(\overline{x}, y)$ опр-на в $B(\overline{x}_0, y_0)$, $F(\overline{x}_0, y_0) = 0$, $F(\overline{x}, y) \in C^1(B(\overline{x}_0, y_0))$, $F'_y(\overline{x}_0, y_0) > 0$ (<0) $\Rightarrow \exists B_\delta(\overline{x}_0) \subset \Omega_x$: на $B_\delta(\overline{x}_0)$ опр-на $y = f(\overline{x})$, $y_0 = f(\overline{x}_0)$, $f(\overline{x}) \in C^1(B_\delta(\overline{x}_0))$, $F(\overline{x}, f(\overline{x})) = 0$ $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}_0)$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}_0, y_0)}$$

Д-во:



n-мерный куб со стороной 2δ

$\Pi_{x,\delta} = \prod (x_{0i} - \delta, x_{0i} + \delta) \subset \mathbb{R}^n, \quad \Pi_\delta = \Pi_{x,\delta} \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\exists \delta > 0 : \forall (\bar{x}, y) \in \Pi_\delta \quad F'_y(\bar{x}, y) \geq \alpha > 0$ (т.к. F'_y непр-на в $B(\bar{x}_0, y_0)$).

Рассмотрим $F(\bar{x}_0, y)$. $F(\bar{x}_0, y_0) = 0$ и $F'_y \geq \alpha > 0 \Rightarrow F(\bar{x}_0, y_0 - \delta) < 0$,

$F(\bar{x}_0, y_0 + \delta) > 0$ (т.к. F строго монотонно $\uparrow$, кажд знач. принимает один раз)

$F(\bar{x}, y)$ непр-на $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall \bar{x} \in \Pi_{x,\delta_1} \quad F(\bar{x}, y_0 - \delta) < 0, F(\bar{x}, y_0 + \delta) > 0$.

$\forall \bar{x} \in \Pi_{x,\delta_1} \quad F(\bar{x}, y)$ строго $\uparrow$ от отриц. до положит. значения $\Rightarrow \exists! y_{\bar{x}}$:

$F(\bar{x}, y_{\bar{x}}) = 0$. Соответствие $\bar{x} \mapsto y_{\bar{x}}$ и обозначим $y = f(\bar{x})$.

Докажем сразу дифференцируемость $f(\bar{x})$, непр-ть будет следствием.

Пусть $\bar{x}'$ и $\bar{x}'' \in \Pi_{x,\delta_1}$

Рассм. $\varphi(t) = F(\bar{x}' + t(\bar{x}'' - \bar{x}'), f(\bar{x}') + t(f(\bar{x}'') - f(\bar{x}'))) \in C^1[0,1]$

$\varphi(0) = F(\bar{x}', f(\bar{x}')) = 0, \quad \varphi(1) = F(\bar{x}'', f(\bar{x}'')) = 0$. Применим теорему Ролля:

$\exists \xi \in (0,1) : \varphi'(\xi) = 0$.

$$\varphi'(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_i' + \xi(x_i'' - x_i')) \cdot \overbrace{(x_i'' - x_i')}^{\text{производная по } t} + \frac{\partial F}{\partial y}(f(\bar{x}) + \xi(f(\bar{x}'') - f(\bar{x}'))) \cdot (f(\bar{x}'') - f(\bar{x}')) = 0$$

Выразим $f(\bar{x}'') - f(\bar{x}')$:

$$f(\bar{x}'') - f(\bar{x}') = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)} \cdot (x_i'' - x_i') = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overset{\xi=0}{\bar{x}', y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}', y)} (x_i'' - x_i') +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi = 0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi = 0)} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)} \right) (x_i'' - x_i')}_{\bar{o}(\rho)}$$

ч.т.д.

22.04.15. Лекция N 16.

Опр. Отображение $\overline{F}(\overline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overline{F}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\overline{x}) \end{pmatrix}$, наз.

дифференцируемым в т. $\overline{x_0}$, если $\exists$ лин. отобр. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такое, что $\overline{F}(\overline{x_0} + \overline{\Delta x}) - \overline{F}(\overline{x_0}) = A \cdot \overline{\Delta x} + \overline{\overline{o}}(\rho(\overline{x_0} + \overline{\Delta x}, \overline{x_0}))$, $\rho \to 0$.

Теорема. $\overline{F}(\overline{x})$ диф-емо в т. $\overline{x_0}$ $\Leftrightarrow$ $\forall i$ $f_i(\overline{x})$ диф-емы в т. $\overline{x_0}$.

Д-во: $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_1(\overline{x_0} + \overline{\Delta x}) - f_1(\overline{x_0}) \\ \vdots \\ f_m(\overline{x_0} + \overline{\Delta x}) - f_m(\overline{x_0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n a_{1j} \cdot \Delta x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{mj} \cdot \Delta x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\overline{o}}(\rho) \\ \vdots \\ \overline{\overline{o}}(\rho) \end{pmatrix}, \ \rho \to 0.$$

(вектор $-\overline{\overline{o}}(\rho) \Leftrightarrow$ все корд-ты $\overline{\overline{o}}(\rho)$)

$\Leftarrow$

$$\overline{F}(\overline{x_0} + \overline{\Delta x}) - F(\overline{x_0}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\overline{x_0}) \cdot \Delta x_j + \overline{\overline{o}}(\rho) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\overline{x_0}) \cdot \Delta x_j + \overline{\overline{o}}(\rho) \end{pmatrix} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\overline{x} = \overline{x_0}} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \overline{\overline{o}}(\rho)$$

ч.т.д.

Опр. М-ца 1-го диф-ала наз. матрицей Якоби (обозн. J) отобр. F, и если $m = n$, то $|J|$ наз. якобиан.

Теорема (о неявном отображении).

$\overline{F}(\overline{x},\overline{y}): \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset D(\overline{F})$ - область, Ω_x - проекция на $\mathbb{R}^n$, Ω_y - проекция на $\mathbb{R}^m$, $\overline{F} \in C^1(\Omega)$, $\exists (\overline{x_0},\overline{y_0}) \in \Omega: \overline{F}(\overline{x_0},\overline{y_0}) = \overline{0}$;

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}\Bigg|_{(\overline{x_0},\overline{y_0})} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists B(\overline{x_0}) \subset \Omega_x$, и $\exists \{\varphi_i(\overline{x})\}_{i=1}^m$, опр-ные на $B(\overline{x_0})$, что $\varphi_i(\overline{x}) \in C^1(B(\overline{x_0}))$, $\overline{\varphi}(\overline{x_0}) = (\overline{y_0})$ (т.е. $\forall i=1,\dots,m$ $\varphi_i(\overline{x_0}) = y_{0i}$), и

$f_i(\overline{x}, \varphi_1(\overline{x}),\dots,\varphi_m(\overline{x})) \equiv 0$ в $B(\overline{x_0})$

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0 \end{cases}$$ — можем решить с-му отн-но y.

Д-во: По индукции.

$m=1$ - верно по теореме о неявной ф-ции.

Пусть при $(m-1)$ верно, рассм. при m.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & |J_{m-1}| \neq 0 & & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \vdots \\ \hline \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right)$$

Т.к. $\det \neq 0$, то $\exists$ минор $\neq 0$, без огр. общности считаем, что $|J_{m-1}| \neq 0$

$\Rightarrow$ по предп. инд. $\exists B(\overline{x_0}, y_{0m})$: $\exists \psi_i(\overline{x}, y_m) \in C^1(B(\overline{x_0}, y_{0m}))$, $i = 1,\dots,m-1$:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n,\psi_1(\overline{x},y_m),\dots,\psi_{m-1}(\overline{x},y_m),y_m) \equiv 0 \\ \vdots \\ f_{m-1}(\overline{x},\psi_1,\dots,\psi_{m-1},y_m) \equiv 0 \end{cases}$$

в $B(\overline{x_0}, y_{0m})$.

Подставим все ψ в f_m!

$f_m(\bar{x}, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}, y_m) = g(\bar{x}, y_m)$

Возьмем от всех равенств производную по y_m. ($\frac{\partial x_i}{\partial y_m} = 0$, т.к. x_i и y_m – независимые перем.)

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} = 0 \quad \cdot A_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m} = 0 \quad \cdot A_{m-1}$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} = \frac{\partial g}{\partial y_m} \quad \cdot A_m$$

Обозначим $A_1, \dots, A_m$ – алг. дополнения в якобиане $(m \times m)$ к элементам последнего столбца. Умножаем на A_i и складываем. В кажд. столбце выносим за скобку общий множитель.
В скобке останутся эл-ты 1-го столбца якобиана, умнож. на алг. дополнения к последнему столбцу. И т.д., кроме последнего столбца:

$$|J| = \frac{\partial g}{\partial y_m} \cdot \underset{|J_{m-1}|}{\underset{\parallel}{A_m}} \neq 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial g}{\partial y_m}\right|_{(\bar{x}_0, y_{0m})} \neq 0$$

$g(\bar{x}, y_m) = 0$ решаем по теореме о неявной ф-ции,

$\exists\, \varphi_m(\bar{x}) = y_m$, кот. удовл. чему нужно

$y_i = \psi_i(\bar{x}, y_m) = \psi_i(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x})) = \varphi_i(\bar{x})$

ч.т.д.

<u>Замечание</u> (о вычислении производных неявных функций)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} dy_j = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} dx_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f_m}{\partial y_j} dy_j = 0 \end{cases}$$

Пользуемся инвариантностью 1-го диф-ала, y зависят от $x \Rightarrow f_i \equiv 0$.
Решаем лин. систему и получаем выражение для диф-алов y через диф-алы x.

Следствие (Теорема об обратном отображении)

$$\overline{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \overline{y} = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\overline{x}) \end{pmatrix}, \quad \overline{F} \in C^1(B(\overline{x}_0)), \quad |J|\Big|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists\, B_1(\overline{x}_0) \subset B(\overline{x}_0)$ такая, что $\overline{F}$ - вз. однозначно с образом $B_1(\overline{x}_0)$, и $\overline{F}^{-1}$ - непр. диф-емо.

Д-во:
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

ч.т.д.

Функциональная зависимость

Опр. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - область, $\exists \{f_i(\overline{x})\}_{i=1}^m$, $f_i \in C^1(\Omega)$. Пусть $(f_1, \dots, f_{m-1}) \subset \Omega_1 \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Если $\exists\, \Phi(y_1, \dots, y_{m-1}) \in C^1(\Omega_1)$ такая, что $f_m(\overline{x}) \equiv \Phi(f_1(\overline{x}), \dots, f_{m-1}(\overline{x}))$ на Ω, то говорят, что f_m функционально зависима от $f_1, \dots, f_{m-1}$.

Лекция N 17. 24.04.15.

Теорема $f_i(\overline{x}) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, $m \leq n$. $\exists\, \overline{x}_0 \in \Omega$:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m \end{pmatrix} = m \text{ в т. } \overline{x}_0 \Rightarrow \{f_i(\overline{x})\}_{i=1}^m \text{ - функц./нез. в } \Omega.$$

Д-во: Предположим, что $f_m(\overline{x}) = \Phi(f_1(\overline{x}), \dots, f_{m-1}(\overline{x}))$ для нек. Ω

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Rightarrow \operatorname{grad} f_m(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \operatorname{grad} f_i(\overline{x}),$$

т.е. в кажд. точке $\operatorname{grad} f_i$ лин./зав. Противоречие.

ч.т.д.

Теорема $f_i(\overline{x}) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,m$, $m>n$. $\exists \overline{x}_0 \in \Omega$:

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m \end{pmatrix} = n$ в $B(\overline{x}_0) \Rightarrow \{f_i(\overline{x})\}_{i=1}^m$ – функц./зав.

Д-во: Для определенности пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$ в т. $\overline{x}_0$

$$\exists B(\overline{x}_0): \begin{cases} y_1 = f_1 \\ \vdots \\ y_n = f_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1,\dots,y_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(y_1,\dots,y_n) \end{cases}$$

теорема об обратном отображении

$$\Rightarrow \forall j \geq 1 \quad f_{n+j}(x_1,\dots,x_n) = f_{n+j}(\varphi_1(\overline{y}),\dots,\varphi_n(\overline{y}))$$

ч.т.д.

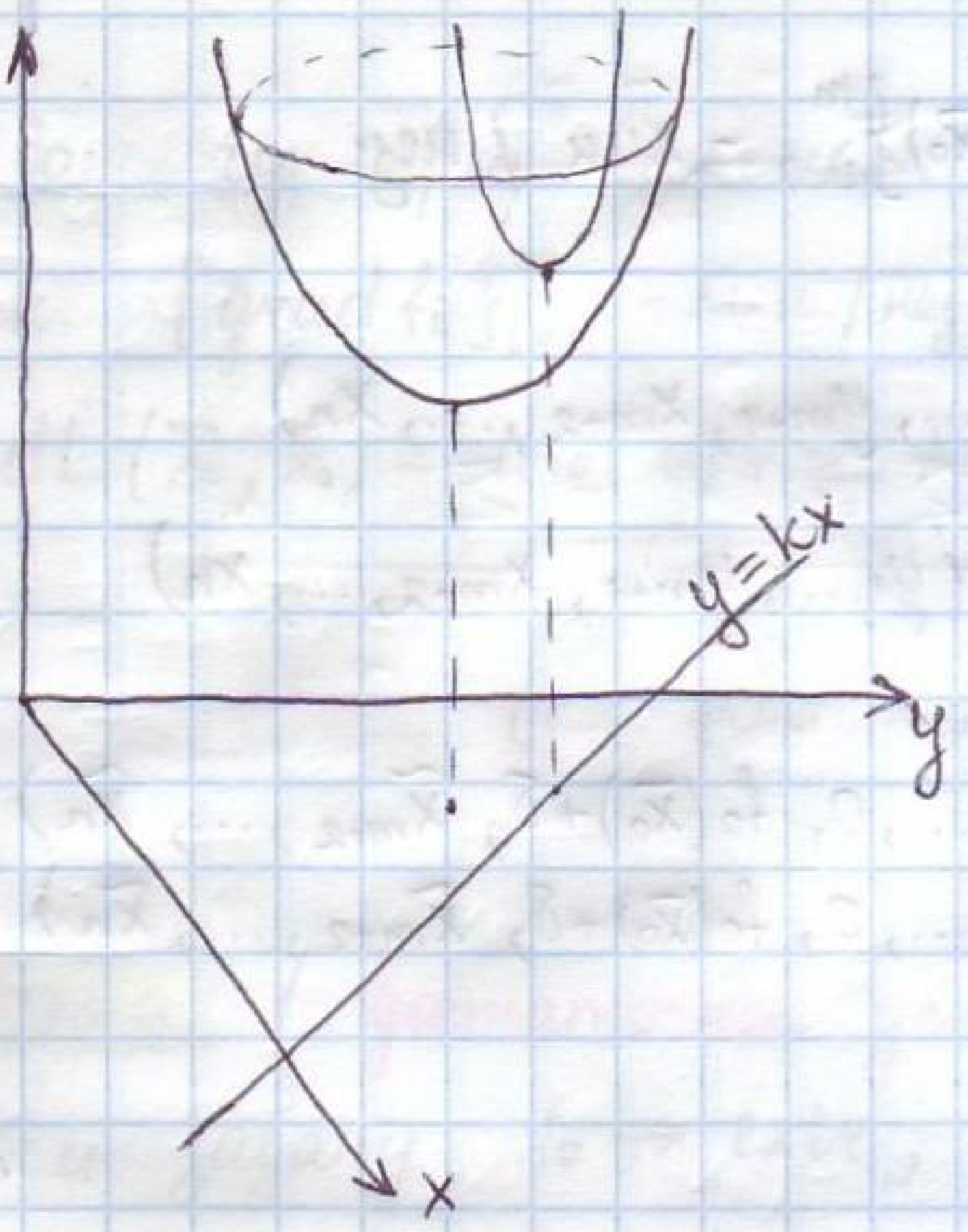
Теорема $f_i(\overline{x}) \in C^1(B(\overline{x}_0))$, $B(\overline{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\overline{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\overline{x}) \end{pmatrix}\Bigg|_{\overline{x}=\overline{x}_0} < \min(n,m)$

$\Rightarrow \{f_i(\overline{x})\}_{i=1}^m$ – функц./зав.

Д-во: без док-ва.

Условный экстремум.

Опр. Пусть $f_i(\overline{x})$, $i=0,\dots,m$, опр-ны в $B(\overline{x}_0)$. $A_F = \{\overline{x} \in B(\overline{x}_0):$ $f_i(\overline{x}) = 0 \ \forall i=1,\dots,m\}$. Пусть $\overline{x}_0 \in A_F$. Если $\forall \overline{x} \in B'(\overline{x}_0) \cap A_F$ $f_0(\overline{x}) > f_0(\overline{x}_0)$ $(<)$, то говорят, что $f_0(\overline{x})$ имеет в т. $\overline{x}_0$ условный min (max) при условиях связи $\begin{cases} f_1(\overline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\overline{x}) = 0 \end{cases}$



Замечание. Исследуем задачу $f_0(\bar{x}) \to \text{extr}$ при $f_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, $m < n$.

Пусть $\text{rank} \begin{pmatrix} \text{grad}\, f_1 \\ \vdots \\ \text{grad}\, f_m \end{pmatrix} = m$, пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$ в $B(\bar{x}_0)$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{matrix}$$

$f_0(\bar{x}) = f_0(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \to \text{extr}$

$\Rightarrow$ теоретически задача сводится к лок. экстр.

Пример. $z = x^2 + y^2$, $y + 2x + 3 = 0$

$y = -2x - 3$

Теорема (необходимое условие условного экстремума)

$f_i(\bar{x}) \in C^1(B(\bar{x}_0))$, $i = 0, \dots, m$, $f_0(\bar{x})$ имеет в т. $\bar{x}_0$ усл. экстр. при условии $f_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$ $\Rightarrow \{\text{grad}\, f_i(\bar{x}_0)\}_{i=0}^{m}$ – лин./зав.

Д-во: От противного, пусть $\{\operatorname{grad} f_i(\overline{x}_0)\}_{i=0}^m$ – лин. / нез.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \\ y_{m+1} = f_0(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_{m+1} = \varphi_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$\left.\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \end{pmatrix}\right|_{\overline{x} = \overline{x}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_m \\ \widetilde{x}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(0, \dots, 0, f_0(\overline{x}_0) + \delta, \widetilde{x}_{m+2}, \dots, \widetilde{x}_n) \\ \varphi_2(0, \dots, 0, f_0(\overline{x}_0) + \delta, \widetilde{x}_{m+2}, \dots, \widetilde{x}_n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$f_0(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) = f_0(\overline{x}_0) + \delta$ $\quad$ δ может быть >0 или <0,

$f_i(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) = 0$ $\quad$ значит нет extr.

ч.т.д.

29.04.15. Лекция №18.

Метод множителей Лагранжа.

Опр. Рассм. задачу $f_0(\overline{x}) \to \text{extr}$ при $f_1(\overline{x}) = \ldots = f_m(\overline{x}) = 0$.

Пусть $\{\operatorname{grad} f_i\}_{i=1}^m$ – лин. / нез. Ф-ция $L(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n) = f_0(\overline{x}) + \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i f_i(\overline{x})$ наз. ф-цией Лагранжа задачи на усл. экстр. $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – множители Лагранжа.

Теорема. (необходимое условие условного экстремума)

$\overline{x}_0$ яв. точкой усл. экстр. задачи $f_0 \to \text{extr}$, $f_1 = \ldots = f_m = 0$

$\Rightarrow \exists\, \overline{\lambda}_0 : \quad dL(\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0) = 0.$

Д-во: Из пред. теоремы $\Rightarrow \{\operatorname{grad} f_i\}_{i=0}^m$ - лин./зав.

т.к. $\{\operatorname{grad} f_i\}_{i=1}^m$ - лин./нез., то $\exists \overline{\lambda}_0$: $\operatorname{grad} f_0(\overline{x}_0) = -\sum\limits_{i=1}^m \lambda_{0i} \operatorname{grad} f_i(\overline{x}_0)$.

$$dL(\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0) = \underbrace{df_0(\overline{x}_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_{0i}\, df_i(\overline{x}_0)}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{(т.к. grad лин./зав.)}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m f_i(\overline{x}_0)\, d\lambda_i}_{\substack{\| \\ 0 \text{ (усл. связи)}}}$$

ч.т.д.

Теорема (достаточное условие условного экстремума)

Рассм. задачу $f_0 \to extr$, $f_1 = \ldots = f_m = 0$, $L(\overline{\lambda}, \overline{x})$ - ф-ция Лагранжа этой задачи. $(\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0)$ - стационарная (критическая) точка $L(\overline{\lambda}, \overline{x})$ (т.е. $dL(\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0) = 0$) $\Rightarrow$ если $d^2L(\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0)\Big|_{df_1 = \ldots = df_m = 0}$ знакоопределен, то есть соответствующий экстр., если знакопеременный - то нет.

Д-во: $\{\operatorname{grad} f_i\}_{i=1}^m$ лин./нез. в т. $\overline{x}_0$, $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f_1(\overline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\overline{x}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$$g(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f_0(\varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

$$dg = df_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_i} dx_i \Big|_{df_1 = \ldots = df_m = 0}$$

$$d^2 g = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_i} dx_i\right)\Big|_{df_1 = \ldots = df_m = 0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_j} dx_j\, dx_i \Big|_{df_1 = \ldots = df_m = 0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_i} d^2 x_i$$

$$d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i\right)\Big|_{\ldots} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \cdot dx_i \Big|_{\ldots} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} d^2 x_i \underset{\text{усл. связи}}{\equiv} 0 \quad k = 1, \ldots, m$$

$$d^2 g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\bar\lambda_0, \bar x_0)\, dx_i\, dx_j \Big|_{df_1 = \ldots = df_m = 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(\bar\lambda_0, \bar x_0)}{\partial x_i}}_{=0} d^2 x_i \Big|_{df_1 = \ldots = df_m = 0}$$

$$d^2 L = d^2(f_0 + \sum \lambda_i f_i) = \underbrace{d^2 f_0 + \sum \lambda_i d^2 f_i}_{=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j} + \underbrace{2 \sum df_i\, df_j}_{\substack{=0 \\ \text{(усл. связи)}}} + \underbrace{\sum f_i\, d^2 \lambda_i}_{\substack{=0 \\ (\lambda_i - \text{независимые перем.})}}$$

ч.т.д.

Пример. $xy \to extr$, $x - y + 5 = 0$

$L = xy + \lambda(x - y + 5)$

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 & \text{– произв. по } x \\ x - \lambda = 0 & \text{– по } y \\ x - y + 5 = 0 & \text{– по } \lambda \end{cases} \qquad \lambda = -\frac{5}{2},\ x = -\frac{5}{2},\ y = \frac{5}{2}$$

$d^2 L = 2dxdy \quad = 2dx^2 > 0 \Rightarrow \min$

$dx - dy = 0 = dx = dy$ (усл. связи)

Замечание (схема поиска абс. extr.)

Метод поиска усл. экстр. позволяет решать задачу о поиске абс. max и min ф-ции на компакте.

$f(\bar x) \to$ абс. max и min на K

$K: \{(x_1, \ldots, x_n): f_1(\bar x) \le 0, \ldots, f_m(\bar x) \le 0\}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \le 0 \\ z - x^2 - y^2 \le 0 \end{cases} \text{ – компакт}$$

1. $\{f_1 < 0, \ldots, f_m < 0\}$ – лок. экстр.

2. $f_1 = 0$ – усл. экстр.

3. $f_2 = 0$ – усл. экстр.

$\vdots$

m+1. $f_m = 0$ – усл. экстр.

m+2. $\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$

$\vdots$

25.05 17.00 досрок