Программа экзамена по математическому анализу.

1 семестр 2022 – 23 учебного года

Лектор – профессор В. Е. Подольский.

1. Множества, кванторы, подмножества. Основные операции на множествах и их свойства. Прямое произведение множеств.
2. Отображения, классификация отображений, области определения и значений. Образы и прообразы множеств при отображениях, обратное отображение.
3. Аксиоматика Пеано натурального ряда. Конечные множества. Отношение порядка. Порядок на **N** (без док-ва). Операции сложения и умножения.
4. Целые числа, их свойства. Рациональные числа, их свойства. Аксиоматика архимедова упорядоченного числового поля.
5. Аксиома полноты, действительные числа. Полнота модели бесконечных десятичных дробей. Модель действительных чисел как числовой прямой, модель действительных чисел как множества сечений рациональных.
6. Ограниченные множества в **R**, точные грани.Принцип полноты Вейерштрасса. Промежутки действительных чисел.Принцип полноты Кантора.
7. Отношение эквивалентности. Равномощность множеств. Равномощность как отношение эквивалентности.
8. Счётные множества, их свойства, примеры. Несчётность интервала. Множества мощности континуум. Сравнение мощностей как отношение порядка (без док-ва). Свойства счётных подмножеств бесконечных множеств. Примеры.
9. Окрестности точки. Классификация точек относительно подмножеств действительных чисел. Открытые и замкнутые множества, их свойства.
10. Критерии замкнутости множеств. Свойства замкнутых множеств. Компакты. Компактность отрезка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
11. Числовые последовательности, подпоследовательности, предел. Свойства последовательностей, имеющих предел.
12. О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Критерий Коши сходимости последовательностей. Примеры.
13. Предельный переход в неравенствах. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
14. Монотонные последовательности, их свойства. Число «е».
15. Частичные пределы последовательностей, их свойства. Верхний и нижний пределы последовательностей, их свойства.
16. Предел функции по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Основные свойства предела функции.
17. О-символика для функций, бесконечно малые и бесконечно большие функции. Исчисление бесконечно малых, арифметические свойства предела. Предельный переход в неравенствах. Критерий Коши существования предела функции.
18. Монотонные функции, теорема о пределе монотонной и ограниченной функции.
19. Непрерывные функции, локальные свойства непрерывных функций. Точки разрыва, их классификация.
20. Глобальные свойства непрерывных функций.
21. Теорема о разрывах монотонной функции. Теорема о обратной функции к непрерывной и монотонной
22. Равномерно непрерывные функции, теорема Кантора
23. Построение показательной функции. Логарифм, степенная функция, синус и косинус.
24. Замечательные пределы, следствия из них.
25. Производная функции, производная по множеству. Производная суммы, произведения и отношения функций.
26. Производная композиции функций, производная обратной функции. Таблица производных.
27. Дифференцируемость функций, первый дифференциал. Связь между дифференцируемостью и существованием производной.
28. Полукасательные и касательная к графику функции. Геометрический смысл первого дифференциала. Инвариантность первого дифференциала и неинвариантность производной.
29. Старшие производные. Старшие дифференциалы. Неинвариантность второго дифференциала.
30. Теорема Ферма, необходимый признак локального экстремума, теорема Ролля. Формула Лагранжа и следствие из неё.
31. Формула Коши. Связь монотонности функции и знака производной.
32. Отсутствие у производной дифференцируемой функции устранимых разрывов и разрывов первого рода. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.
33. Правила Лопиталя.
34. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Пеано и в общей форме. Остаточный член в форме Лагранжа.
35. Формула Тейлора для основных элементарных функций. Достаточные условия локального экстремума. Общая схема поиска глобального экстремума функции на отрезке.
36. Выпуклые функции, достаточное условие строгой выпуклости. Теорема о касательной к графику выпуклой функции. Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия наличия точки перегиба. Асимптоты. Общая схема построения графика функции.