§ 5.3. Приложения дифференциального исчисления

5.3.1. Касательные и нормали к кривым

Если на промежутке $\langle a;\, b\rangle$ заданы непрерывные функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то множество

$$L = \{(x, y) \colon x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \langle a;\, b\rangle\}$$

называется *кривой* (или *линией*) *в* $\mathbb{R}^2$ (*плоской кривой*). Аналогично *кривой* (*линией*) *в* $\mathbb{R}^3$ называется множество

$$L = \bigl\{(x, y, z) \colon x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in \langle a;\, b\rangle\bigr\},$$

если функции x, y и z непрерывны на промежутке $\langle a;\, b\rangle$.

Пара $(x(t), y(t))$ (тройка $(x(t), y(t), z(t))$ в случае пространственной кривой) упомянутых непрерывных функций называется *параметризацией* кривой L. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать только такие кривые и такие их параметризации, что лишь конечное число точек рассматриваемой кривой может иметь более одного прообраза при рассматриваемой параметризации, причём прообраз каждой точки может быть только конечным множеством. Можно доказать, что для рассматриваемых кривых число прообразов их точек при рассматриваемых параметризациях не зависит от выбора этих параметризаций. Точки кривой, которые имеют более одного прообраза, называются *точками самопересечения кривой*.

Точки $(x(a), y(a))$ и $(x(b), y(b))$, если они принадлежат кривой L и различны, называются её *краевыми* (*граничными*) *точками*; точки кривой, не являющиеся граничными, называются её *внутренними точками*.

Кривая L называется *замкнутой*, если промежуток $\langle a;\, b\rangle$ является отрезком $[a;\, b]$ и граничные точки совпадают друг с другом, т. е.

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b)).$$

Пусть $(x(t), y(t))$ — некоторая параметризация плоской кривой L. Если в некоторой точке t_0 промежутка $\langle a;\, b\rangle$ функции $x(t)$, $y(t)$ имеют правые производные $x'_+(t_0)$, $y'_+(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то задаваемая параметрическими уравнениями полупрямая

$$x = x(t_0) + x'_+(t_0)(t - t_0), \quad y = y(t_0) + y'_+(t_0)(t - t_0), \quad t \geqslant t_0,$$

называется *полукасательной* к кривой L в точке $M_0(x(t_0), y(t_0))$. Если в точке t_0 промежутка $\langle a;\, b\rangle$ функции $x(t)$, $y(t)$ имеют левые производные $x'_-(t_0)$, $y'_-(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то полупрямая $x = x(t_0) + x'_-(t_0)(t - t_0)$, $y = y(t_0) + y'_-(t_0)(t - t_0)$, $t \leqslant t_0$, также называется полукасательной к кривой L в точке $M_0(x(t_0), y(t_0))$. Если же в точке t_0 промежутка $\langle a;\, b\rangle$ функции $x(t)$, $y(t)$ имеют производные $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то в точке M_0 существуют полукасательные к L как с одной, так и с другой стороны, а угол между ними равен π, т. е. эти две полупрямые сливаются в прямую. Эта прямая называется *касательной* к кривой L в точке M_0. Можно доказать, что во всякой внутренней точке M_0

кривой L существует не более одной касательной, т. е. при любых параметризациях кривой L, для которых существуют касательные в точке M_0, эти касательные совпадают.

Нормалью к кривой L в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной (полукасательной) к кривой L в точке M_0.

Кривая называется *гладкой*, если она имеет касательную в каждой своей внутренней точке. Кривая называется кусочно гладкой, если она не имеет касательных не более чем в конечном числе своих внутренних точек.

Если кривая L на плоскости xOy — график непрерывной функции $y=f(x)$, то дифференцируемость f в точке x_0 эквивалентна существованию у кривой L невертикальной касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0=f(x_0)$, а уравнение $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ является уравнением этой касательной.

Если функция f непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ (или $-\infty$), то в точке $M_0(x_0, y_0)$ график этой функции имеет вертикальную касательную $x=x_0$. Локальное поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 13 *а* и рис. 13 *б* соответственно.

Если в точке x_0 непрерывная функция f не дифференцируема, однако существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то график этой функции имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ односторонние полукасательные: левую — полупрямую $y-y_0=f'_-(x_0)(x-x_0)$, $x\leqslant x_0$, и правую — полупрямую $y-y_0=f'_+(x_0)(x-x_0)$, $x\geqslant x_0$. Тогда точка x_0 называется *точкой излома* или *угловой точкой кривой* (см. рис. 13 *в*).

Если функция f непрерывна в точке x_0 и

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty, \qquad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty,$$

то её график в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет левую и правую полукасательные, каждая из которых является вертикальной полупрямой, направленной вниз: $x=x_0$, $y\leqslant y_0$ (см. рис. 14 *а*). Если

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty, \qquad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty,$$

то левая и правая полукасательные — одна и та же полупрямая, направленная вверх: $x=x_0$, $y\geqslant y_0$ (рис. 14 *б*).

Точка кривой, в которой односторонние полукасательные совпадают, называется *точкой возврата*. Поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 14 *а*, *б*, *в*. Отметим, что для графика непрерывной функции возможен только один из вариантов: *а*) или *б*).

Если две кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке каждая из этих кривых имеет касательную, то углом между этими кривыми называется угол между их касательными в точке M_0. Для краткости в дальнейшем вместо слов «кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$» будем говорить «кривая $y=f(x)$».

Задача 5.236. Написать уравнения касательных и нормалей к кривой $y=x2^{-x}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$; б) $x=-1$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(-1)=-2$, $y'=2^{-x}-x2^{-x}\ln 2=2^{-x}(1-x\ln 2)$, $y'(0)=1$, $y'(-1)=2(1+\ln 2)$. Следовательно, уравнения касательных будут

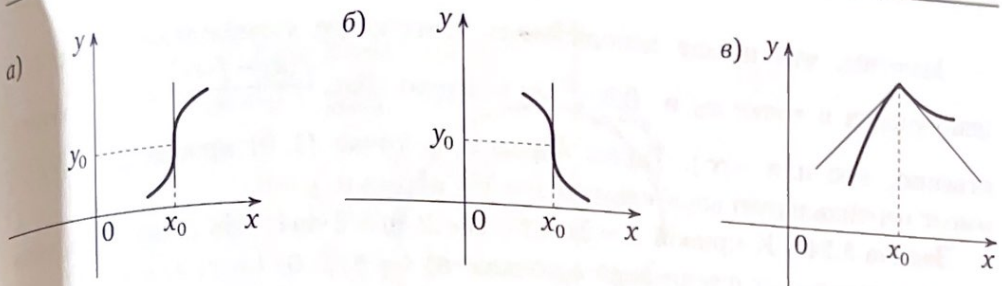


Рис. 13

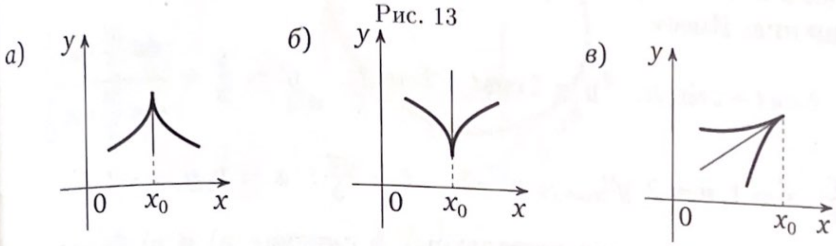
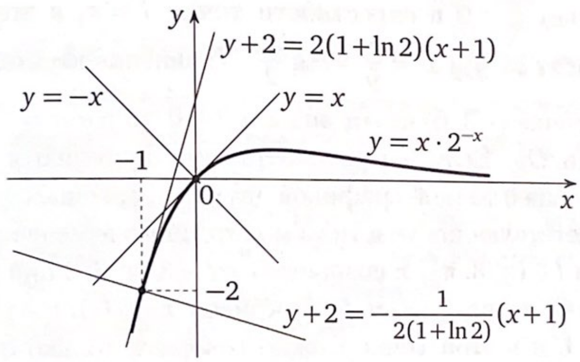


Рис. 14

иметь вид: а) $y = x$, б) $y + 2 = 2(1 + \ln 2)(x + 1)$, уравнения нормалей а) $y = -x$, б) $y + 2 = -\dfrac{1}{2(1+\ln 2)}(x + 1)$. □

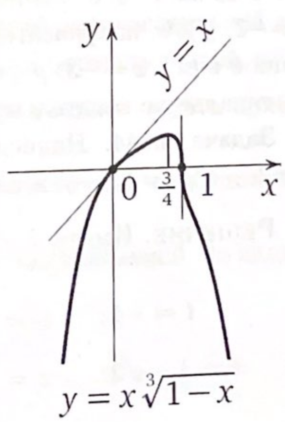


Задача 5.240. Написать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = x\sqrt[3]{1-x}$ в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = \dfrac{3}{4}$; в) $x = 1$.

Решение. Имеем $y(0) = 0$, $y(1) = 0$,

$$y'(x) = (1-x)^{1/3} - x\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3} = \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(3-4x), \quad x \neq 1. \tag{3}$$

Следовательно, $y'(0) = 1$, поэтому уравнение касательной в случае а) имеет вид $y = x$, а нормаль — $y = -x$.



Поскольку $y'(\frac{3}{4}) = 0$, уравнение касательной в случае б) имеет вид $y = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$, а нормаль задаётся уравнением $x = \dfrac{3}{4}$.

в) При $x = 1$ формула (3) теряет смысл, поэтому по определению производной находим

$$y'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty.$$

Заметим, что проще использовать следующее утверждение: если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ (соответственно, $+\infty$ или $-\infty$). Таким образом, в точке $(1,0)$ кривая $y=x\sqrt[3]{1-x}$ имеет вертикальную касательную $x=1$ и нормаль $y=0$. $\square$

Задача 5.242. К кривой $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$ написать уравнения касательных и нормалей в точках: а) $t=\pi/2$; б) $t=\pi$; в) $t=3\pi/2$.

Решение. Имеем

$$\dot{x} = -2\sin t + 2\sin 2t, \quad \dot{y} = 2\cos t - 2\cos 2t, \quad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3t}{2};$$

$$t = \frac{\pi}{2}:\ x = 1, y = 2, y'|_{t=\pi/2} = -1; \quad t = \frac{3\pi}{2}:\ x = 1, y = -2, y'|_{t=3\pi/2} = 1.$$

Следовательно, уравнения касательных в случаях а) и в) будут иметь вид соответственно $y-2=-(x-1)$ и $y+2=x-1$, а уравнения нормалей — соответственно $y-2=x-1$ и $y+2=-(x-1)$.

В случае б) при $t=\pi$: $x=-3$, $y=0$, функция y' не определена. Рассмотрим кривую в окрестности точки $x=-3$. Параметрическую связь x и y можно рассматривать и как определение функции $y=f(x)$, и как определение функции $x=g(y)$. Поскольку $\dot{y}<0$ в окрестности точки $t=\pi$, в этой окрестности x непрерывно зависит от y и $x'=\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\operatorname{ctg}\dfrac{3t}{2}$. Уравнение касательной к графику этой функции в точке $(-3,0)$ имеет вид $x+3=0\cdot y$, т. е. $x=-3$ — касательная, параллельная оси Oy. Если же рассматривать функцию $y=f(x)$, то точка $(-3,0)$ является общей точкой графиков двух непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, соответствующих участкам монотонного изменения $x(t)$: x убывает от $3/2$ до -3 при $t\in(\pi/3;\pi)$, x возрастает от -3 до $3/2$ при $t\in(\pi;5\pi/3)$. Поскольку $x\geqslant-3$, обе ветви $f_1(x)$ и $f_2(x)$ кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ лежат справа от прямой $x=-3$, и в этой точке можно говорить только об односторонних полукасательных к каждой из ветвей. Имеем

$$\lim_{x\to-3+} f_1'(x) = \lim_{t\to\pi-}\operatorname{tg}\frac{3t}{2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-3+} f_2'(x) = \lim_{t\to\pi+}\operatorname{tg}\frac{3t}{2} = -\infty.$$

Отсюда, рассматривая кривую в целом, видим, что полукасательная «сверху» в точке $(-3,0)$ является вертикальной полупрямой, направленной вверх: $x=-3$, $y\geqslant0$; полукасательная «снизу» — вертикальной полупрямой, направленной вниз: $x=-3$, $y\leqslant0$. Угол между ними равен π, поэтому кривая имеет вертикальную касательную $x=-3$ и нормаль $y=0$ (см. рис. 15). $\square$

Задача 5.244. Написать уравнения касательных и нормалей к кривой $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ в точках а) $t=-1$; б) $t=1-\sqrt{2}$; в) $t=1$.

Решение. Имеем $\dot{x}=2-2t$, $\dot{y}=3-3t^2$, $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\dfrac{3}{2}(1+t)$, $t\neq1$;

$$t = -1:\quad x = -3,\quad y = -2,\qquad y'|_{t=-1} = 0;$$

$$t = 1-\sqrt{2}:\quad x = -1,\quad y = -4+2\sqrt{2},\quad y'|_{t=1-\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

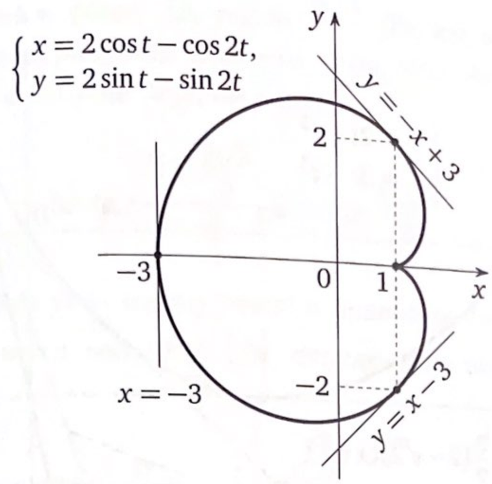


Рис. 15

Следовательно, уравнения касательных в случаях а) и б) будут иметь вид соответственно $y+2=0$ и $y+4-2\sqrt{2}=\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})(x+1)$, а уравнения нормалей — соответственно $x+3=0$ и $y+4-2\sqrt{2}=-\frac{2}{3(2-\sqrt{2})}(x+1)$.

В случае в) $x=1$, $y=2$, в точке $t=1$ функция $\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}$ не определена, при $t=1$ имеем $\dot{y}=0$ и $\dot{x}=0$. Поэтому нельзя утверждать, что в окрестности точки $(1,2)$ существует взаимно однозначное соответствие между x и y. У функции $x(t)$ два участка монотонности: она возрастает на $(-\infty; 1]$ от $-\infty$ до 1, убывает на $[1; +\infty)$ от 1 до $-\infty$. Соответственно получаем две непрерывные ветви рассматриваемой кривой $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, каждая с областью определения $x\leqslant 1$. Точка $M(1,2)$ — общая для них. Поскольку $x\leqslant 1$, можно найти только односторонние полукасательные к каждой из ветвей в точке M. Имеем

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f_1(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1-}f_1'(x)=\lim_{t\to 1-}\frac{3}{2}(1+t)=3;$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f_2(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1-}f_2'(x)=\lim_{t\to 1+}\frac{3}{2}(1+t)=3.$$

Итак, полупрямая $y-2=3(x-1)$, $x\leqslant 1$, является общей полукасательной для обеих ветвей рассматриваемой кривой в точке $(1,2)$, а нормаль в этой точке задаётся уравнением $y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$. Точка $(1,2)$ — точка возврата кривой (см. рис. 16). □

Задача 5.247. Написать уравнения касательных в точках с абсциссами а) $x=0$; б) $x=a$ к кривой $3x^2+2y^2-4xy=a^2$, $a>0$.

Решение. Пользуясь правилом дифференцирования неявной функции, имеем $6x+4yy'-4y-4xy'=0$ и при $x\neq y$ получаем

$$y'=\frac{3x-2y}{2(x-y)}. \tag{4}$$

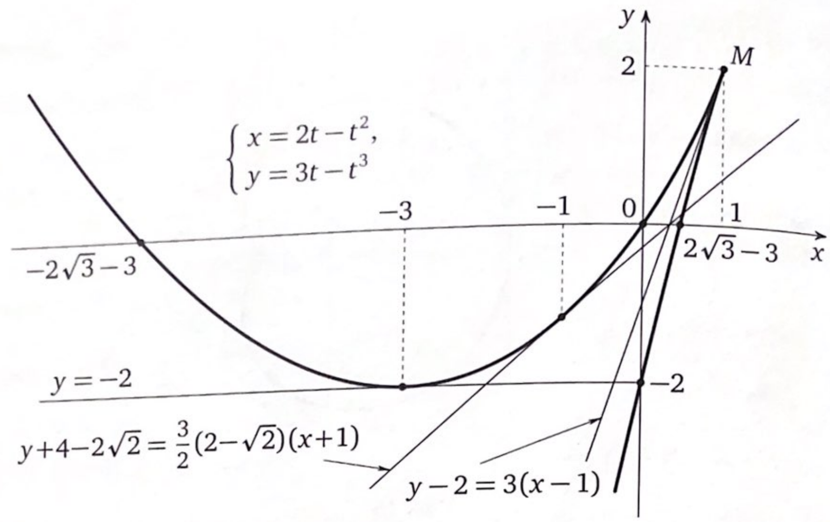


Рис. 16

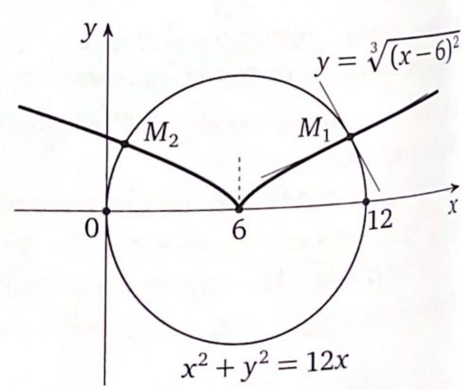
Значению $x = 0$ на заданной кривой отвечают две точки $M_1\Big(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\Big)$ и $M_2\Big(0, -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Big)$. Поскольку $y'|_{M_1} = y'|_{M_2} = 1$, уравнение касательной в точке M_1 имеет вид $y = x + \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, а в точке M_2 имеет вид $y = x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Значению $x = a$ на заданной кривой отвечает единственная точка $M_0(a, a)$. Её абсцисса и ордината совпадают, поэтому для нахождения y' в этой точке равенство (4) неприменимо. Если же в окрестности точки M_0 рассматривать не y как функцию от x, а x как функцию от y, то получим $x' = \dfrac{2(x-y)}{3x-2y}$, а значит, в точке M_0 данная кривая имеет вертикальную касательную $x = a$ и нормаль $y = 0$. □

Задача 5.255. Найти угол, под которым пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 12x \quad \text{и} \quad y = \sqrt[3]{(x-6)^2}.$$

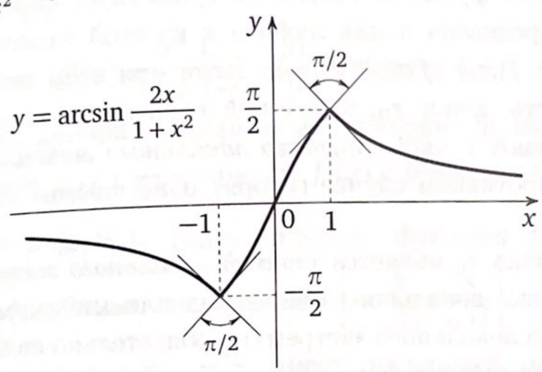
Решение. Чтобы найти точку пересечения кривых, решим уравнение $(x-6)^2 + \sqrt[3]{(x-6)^4} = 36$. Положим $(x-6)^2 = z^3$, тогда $z^3 + z^2 = 36$. Поскольку $z^3 + z^2 - 36 = (z-3)(z^2 + 4z + 12)$, уравнение имеет единственный корень $z = 3$, откуда $x = 6 \pm \sqrt{27}$. Итак, точками пересечения кривых являются точки $M_1(6 + \sqrt{27}, 3)$ и $M_2(6 - \sqrt{27}, 3)$. Поскольку кривые симметричны относительно прямой $x = 6$, углы, под которыми они пересекаются в точках M_1 и M_2, равны. Найдём угловые коэффициенты касательных к кривым в точке M_1. Для первой кривой имеем $2x + 2yy' = 12$, откуда $y' = \dfrac{6-x}{y}$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к ней в точке M_1 равен $-\sqrt{3}$. Для второй кривой получаем $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-6}}$, поэтому угловой коэффици-



ент касательной к ней в точке M_1 равен $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Таким образом, при помощи формулы для тангенса разности находим угол, под которым пересекаются кривые в точке M_1 (и в точке M_2), он равен

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \operatorname{arctg}\frac{11\sqrt{3}}{3}. \qquad \square$$

Задача 5.259. Найти угол между левой и правой полукасательными к кривой $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ в угловой точке (см. определение на с. 298).



Решение. Имеем

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}(1+x^2)} \quad (|x|\neq 1).$$

Следовательно, только точки $M_1(1,\pi/2)$ и $M_2(-1,-\pi/2)$ могут быть угловыми. Имеем $y'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1+} y'(x) = \lim\limits_{x\to 1+}\frac{-2}{1+x^2} = -1$, $y'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} y'(x) = 1$. Угловые коэффициенты левой и правой полукасательных в точке M_1 равны 1 и -1, угол между ними равен $\pi/2$. Поскольку функция $y(x)$ нечётная, кривая симметрична относительно начала координат, и угол между левой и правой полукасательными в точке M_2 также равен $\pi/2$. $\square$

5.3.2. Возрастание и убывание функции. Экстремумы

В этом разделе обсуждается связь монотонности функции и наличие экстремумов с производной функции. Определение монотонности функции на множестве см. в гл. 1.

Если монотонная на интервале $(a;b)$ функция дифференцируема на $(a;b)$, то её производная либо неотрицательна на интервале $(a;b)$, либо неположительна на нём. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всех $x\in(a;b)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f'(x)=0$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Задача 5.271. Показать, что функция $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ возрастает на луче $(0;+\infty)$.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю производную на интервале $(a;\,b)$ и $x_0 \in (a;\,b)$. Тогда для любого $x \in (a;\,b)$ найдётся такая точка c, лежащая на интервале с концами x_0 и x, что $R_n(x;\,f,\,x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; в этом случае говорят, что остаточный член записан *в форме Лагранжа*. Выражение остаточного члена в форме Лагранжа в отличие от формы Пеано позволяет оценить величину погрешности, допускаемой при замене функции f многочленом T_n на некотором промежутке.

Задача 5.388. Оценим погрешность при замене функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ многочленом Тейлора $T_5(x;\,f,\,1)$ на отрезке $[1/2;\,3/2]$.

Решение. Поскольку $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin(n \operatorname{arcctg} x)$, $n \geqslant 2$ (это можно доказать по индукции), имеем

$$T_5(x;\,f,\,1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{40}(x-1)^5,$$

$$f(x) - T_5(x;\,f,\,1) = R_5(x;\,f,\,1) = \frac{f^{(6)}(c)(x-1)^6}{6!}.$$

Точка c лежит между x и 1, $|x-1| \leqslant \dfrac{1}{2}$ и $|\sin(n \operatorname{arcctg} c)| \leqslant 1$, поэтому

$$|R_5(x;\,f,\,1)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{5!}{(1+c^2)^3} \leqslant \frac{1}{2^6 \cdot 6} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{1}{6 \cdot 5^3} = \frac{1}{750}.$$

Итак, для всех $x \in [1/2;\,3/2]$ многочлен

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{40}(x-1)^5$$

приближает функцию $\operatorname{arctg} x$ с погрешностью не более чем $1/750$. □

Правило Лопиталя. Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой правой полуокрестности $U_+(a)$ точки a, причём $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in U_+(a)$ и $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Тогда если

1) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$ или 2) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$,

то $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Правило верно и тогда, когда l есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и для $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (в первом случае функции f и g должны удовлетворять соответствующим условиям в некоторой левой полуокрестности точки a, во втором случае — в некоторой проколотой окрестности точки a).

Задача 5.397. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$.

Решение. При $x \to 0+$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к $-\infty$, поэтому в силу правила Лопиталя получаем

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{2\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{2}.$$ □

Подчеркнём, что выкладка вида $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ должна читаться с конца: если предел отношения производных существует и равен l, то существует и предел отношения исходных функций, также равный l. На практике обычно пишут соответствующую цепочку в естественном порядке, применяя правило Лопиталя достаточное число раз. Если на некотором шаге получается отношение, имеющее предел, то тем самым устанавливается обоснованность результата для исходного отношения.

Отметим, что для вычисления рассмотренного предела неприменима формула Тейлора, так как функция $\ln x$ не определена в нуле, а значит, не может быть приближена многочленом Тейлора ни в какой правой полуокрестности этой точки.

Задача 5.403. Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\ln(x^3+1)}$.

Решение. Чтобы упростить выкладки, связанные с применением правила Лопиталя, заменим числитель и знаменатель дроби на эквивалентные им при $x\to 0$ функции (см. табл. на с. 232):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\ln(x^3+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Обозначим $f(x) = \sin x - \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x^3$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при всех значениях x, причём $g'(x) \neq 0$ в любой проколотой окрестности нуля. Предел отношения $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$ при $x\to 0$ представляет собой неопределённость типа $\dfrac{0}{0}$. Если мы раскроем эту неопределённость любым способом, то есть вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то согласно правилу Лопиталя найденное значение и будет искомым пределом. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - x^2 + o(x^2))}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, искомый предел равен $\dfrac{1}{6}$. □

Таким образом, при вычислении пределов следует выбирать наиболее рациональный путь и комбинировать различные методы, заменяя множители (но не отдельные слагаемые!) эквивалентными функциями и применяя как формулу Тейлора, так и правило Лопиталя (разумеется, не забывая убедиться в применимости того или иного метода к данной задаче).

Задача 5.411. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \pi\operatorname{ctg}\pi x\right)$.

Решение. Предел можно найти с помощью правила Лопиталя, представив данную разность в виде отношения функций:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \pi\operatorname{ctg}\pi x\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x - \pi\cos\pi x\cdot\ln x}{\sin\pi x\cdot\ln x},$$

однако выкладки, связанные с дифференцированием, очень громоздки, а данный пример можно решить проще, воспользовавшись формулами Тейлора.

Положив $y=x-1$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y-\pi\cos\pi y\cdot\ln(1+y)}{\ln(1+y)\cdot\sin\pi y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\pi y+o(y^2)-\pi(1+o(y))\left(y-\dfrac{y^2}{2}+o(y^2)\right)}{\pi y^2}=\frac{1}{2}. \quad \square$$

Задача 5.419. Найти предел степенно-показательной функции $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$.

Решение. Для применения правила Лопиталя сведём задачу к вычислению предела отношения функций. Справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}.$$

Функции $f(x)=\ln x$ и $g(x)=x^{-1}$ удовлетворяют условиям применимости правила Лопиталя для раскрытия неопределённости типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x\to 0+$, причём $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=e^0=1$. $\square$

Отметим, что рассмотренный предел можно вычислить и без использования правила Лопиталя, положив $t=-\ln x$ и воспользовавшись задачей 4.158:

$$\lim_{x\to 0+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-t}{e^t}}=e^0=1.$$

Внимание! Если предел отношения производных не существует, то это ничего не говорит о существовании предела отношения функций.

Задача 5.432. Пусть $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x$ и $g(x)=x$. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+2\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

а $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}+2\cos x}{1}$ не имеет предела при $x\to 0$. $\square$

Применяя правило Лопиталя, необходимо также следить за тем, чтобы было выполнено либо условие 1), либо условие 2).

Задача 5.434. Пусть $f(x)=\sin x+\cos x$ и $g(x)=x+2$. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Какое условие правила Лопиталя нарушено?

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sin x}{1}=1$. Здесь не выполнены ни условие $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, ни условие $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$. $\square$