5.223. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$, дифференцируема на $(0;1)$, $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f'(x)\geqslant -2$. Доказать, что $f(x)$ — линейная функция.

5.224. Пусть функция $f\in C[a;b]$ дифференцируема на $(a;b)$ и не является линейной. Доказать, что существуют такие точки $x, y\in(a;b)$, что $f'(x)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(y)$.

5.225. Пусть функция $f(x)\in C^1[0;+\infty)$, $f(0)=1$ и $|f(x)|\leqslant e^{-x}$ при $x\geqslant 0$. Доказать, что существует такая точка $c>0$, что $f'(c)=-e^{-c}$.

Применяя теорему Лагранжа, доказать неравенства (5.226—5.230).

◊**5.226.** $|\sin a-\sin b|\leqslant|a-b|$, $a, b\in\mathbb{R}$.

√**5.227.** $\ln\dfrac{1+a^2}{1+b^2}\leqslant|a-b|$, $a, b\in\mathbb{R}$. **5.228.** $\ln\dfrac{1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\leqslant\dfrac{1}{4}|a-b|$, $a, b\geqslant 1$.

5.229. $\sqrt{3}|\arcsin(\operatorname{tg}a)-\arcsin(\operatorname{tg}b)|\leqslant 2\sqrt{2}|a-b|$, $a, b\in\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right)$.

√**5.230.** $\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}<\dfrac{1}{(x-1)^\alpha}-\dfrac{1}{x^\alpha}$, $x>1$, $\alpha>0$.

√**5.231.** Доказать, что функция f, имеющая ограниченную производную на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a;b\rangle$, равномерно непрерывна на $\langle a;b\rangle$. Верно ли обратное утверждение для дифференцируемой функции f?

5.232. Пусть f на интервале $(a;b)$ имеет ограниченную вторую производную. Доказать, что f равномерно непрерывна на $(a;b)$.

5.233. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, если
а) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$; б) $f(x)=x\sin(\ln|x|)$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$.

5.234. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x\geqslant x_0$ и $|f'(x)|\leqslant g'(x)$. Доказать, что $|f(x)-f(x_0)|\leqslant g(x)-g(x_0)$ для любого $x\geqslant x_0$.

5.235. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1;x_2]$ и $x_1>0$. Доказать, что существует такая точка $c\in(x_1;x_2)$, что

$$\frac{1}{x_2-x_1}(x_1f(x_2)-x_2f(x_1))=f(c)-cf'(c).$$

Составить уравнения касательной и нормали или полукасательной к кривой в заданной точке (5.237—5.250).

◊**5.236.** $y=x2^{-x}$, а) $x=0$; б) $x=-1$.

√**5.237.** $y=2^{-x^2}\sin\pi x$, а) $x=0$; б) $x=1$.

5.238. $y=x^2\arcsin\dfrac{x}{2}$, а) $x=1$; б) $x=\sqrt{3}$.

5.239. $y=x^3\operatorname{ctg}\pi x$, а) $x=\dfrac{1}{4}$; б) $x=\dfrac{1}{2}$.

◊**5.240.** $y=x\sqrt[3]{1-x}$, а) $x=0$; б) $x=\dfrac{3}{4}$; в) $x=1$.

√**5.241.** $y=\sqrt[3]{1-\cos^3 2x}$, а) $x=0$; б) $x=\dfrac{\pi}{6}$.

◊**5.242.** $x(t)=2\cos t-\cos 2t$, $y(t)=2\sin t-\sin 2t$,
а) $t=\dfrac{\pi}{2}$; б) $t=\pi$; в) $t=\dfrac{3\pi}{2}$.

5.243. $x(t)=t^3-3t$, $y(t)=t^2+2t$, а) $t=-1$; б) $t=0$; в) $t=\sqrt{3}$.

◊**5.244.** $x(t)=2t-t^2$, $y(t)=3t-t^3$, а) $t=-1$; б) $t=1-\sqrt{2}$; в) $t=1$.

5.245. $x(t)=e^{-t}\sin t$, $y(t)=e^{-t}\cos t$, а) $t=0$; б) $t=\dfrac{\pi}{4}$; в) $t=\dfrac{3\pi}{4}$.

√**5.246.** $x(t)=\pi t-\sin\pi t$, $y(t)=t-\operatorname{arctg}t$, а) $t=0$; б) $t=1$; в) $t=2$.

◇ **5.247.** $3x^2+2y^2-4xy=a^2$, $a>0$, а) $x=0$; б) $x=a$, $a>0$.

✓ **5.248.** $x^2-xy+2y^2+x-y-14=0$, $x=1$.

5.249. $2x^4-y^2-x^2+2y=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5.250. $2^{x/y}+2^{2y/x}=6$, $x=2$, $y=1$.

5.251. Найти вертикальные касательные к кривой $r=a(1+\cos\varphi)$ и показать, что кривая лежит между этими касательными.

Найти углы между кривыми (5.252—5.258).

✓ **5.252.** $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

5.253. $y=x^2\ln x$, $y=4-4x^2$.

5.254. $y=4+2\sqrt[3]{x-2}$, $y=2x$.

◇ **5.255.** $x^2+y^2=12x$, $y=\sqrt[3]{(x-6)^2}$.

5.256. $x(t)=t^3+3t$, $y(t)=(t+1)\ln(1+t)$, $y=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

5.257. $r=a$, $r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

5.258. $r=5a\cos\varphi$, $r=a(4-3\cos\varphi)$.

◇ **5.259.** Найти угол между левой и правой полукасательными к кривой

$$y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

в угловой точке.

5.260. Найти угол между левой и правой полукасательными в угловых точках кривых:

✓ а) $y=\sqrt{\ln(1+9x^2)}$; б) $y=\arccos\dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$; в) $y=\arccos(\sin x)$, $|x|\leqslant 2\pi$.

✓ **5.261.** Найти угол между двумя окружностями одного радиуса, если центр одной из них лежит на другой.

5.262. Найти все такие значения R, что окружности $(x-2)^2+y^2=R^2$ и $x^2+y^2=1$ пересекаются под прямым углом.

5.263. Доказать, что семейства гипербол $x^2-y^2=a^2$ и $xy=b$ образуют ортогональную сетку, т. е. любая кривая первого семейства пересекает любую кривую второго семейства под прямым углом.

5.264. Доказать, что любая касательная к логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

5.265. Доказать, что любая касательная к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.

✓ **5.266.** Доказать, что у астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ для любой касательной длина её отрезка, заключённого между осями координат, постоянна.

5.267. Доказать, что у трактрисы

$$x(t)=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),\quad y(t)=a\sin t,\quad 0<t<\pi,$$

длина отрезка касательной от точки касания до оси Ox постоянна.

5.268. Доказать, что расстояние от начала координат до любой нормали к кривой $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t-t\cos t)$ постоянно.

5.269. Доказать, что если к кривой $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, провести касательные в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0+\pi$, то они будут перпендикулярны при любом $t_0\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.270. Доказать, что кривая $xy\sin(x+y)=2x^2-y^2$ касается прямой $y=x$ во всех общих точках, кроме начала координат.

5.393. Найти $f^{(n)}(0)$, если: а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$; б) $f(x)=\cos x^2$.

5.394. Найти $f^{(n)}(0)$ и выписать многочлен Тейлора $T_n(x;f,0)$ порядка n для функций: а) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; б) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5.395. Вычислить с точностью до 10^{-3}: а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{26}$; в) $\arcsin\frac{1}{3}$.

5.396. Написать многочлен Тейлора третьего порядка в указанной точке для следующей функции $y(x)$, заданной неявно:

а) $x^4-4ax^2y+2ay^3+a^2y^2=0$, $x_0=y_0=a$ $(a>0)$;

б) $x^3+y^3-axy=a^3$, $x_0=0$, $y_0=a$; в) $y^3-x^2y+x^5=1$, $x_0=1$, $y_0=0$;

г) $x\cos y+y\cos x=2x$, $x_0=y_0=0$.

Найти предел, используя эквивалентности, правило Лопиталя или формулу Тейлора (5.397—5.418).

◇ **5.397.** $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

✓ **5.398.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$.

5.399. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2+x^4)}{1-\cos x}$.

✓ **5.400.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{x-\sin x}$.

5.401. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^3)}$.

5.402. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

◇ **5.403.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x-\operatorname{arctg} x}-1}{\ln(x^3+1)}$.

5.404. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

✓ **5.405.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$.

5.406. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

✓ **5.407.** $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln x$.

5.408. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\ln\dfrac{1}{x}$.

5.409. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

✓ **5.410.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{x}\right)$.

◇ **5.411.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)$.

5.412. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

5.413. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$.

5.414. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg} x+\dfrac{2}{2x-\pi}\right)$.

✓ **5.415.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

5.416. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

5.417. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$.

5.418*. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((x+e)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+e}}\right)$.

Найти предел степенно-показательной функции, используя эквивалентности, правило Лопиталя или формулу Тейлора (5.419—5.430).

◇ **5.419.** $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

✓ **5.420.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{1/x}$.

5.421. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{1/x}$.

✓ **5.422.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x\right)^{x}$.

5.423. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$.

5.424. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

✓ **5.425.** $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

5.426. $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

5.427. $\lim\limits_{x\to 0+}(2\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5.428. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

5.429. $\lim\limits_{x\to \pi-}(\sin x)^{\pi-x}$.

5.430. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{1+x}\right)^{1/x}$.

5.221. Например, $f(x)$ ... $\left\{ 0, \right.$ ... $x \neq 0$, если $x = 0$, где $\alpha \in (1;2$

5.222. *Указание.* а) Рассмотреть функцию $f(x) =$

б) Применить теорему Лагранжа.

в) Показать, что $\dfrac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n} = \dfrac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}\gamma_n + \dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}(1-\gamma_n)$, где $0 < \gamma_n < 1$.

5.223. *Указание.* Рассмотреть функцию $g(x) = f(x) + 2x - 4$.

5.224. *Указание.* Поскольку функция f не линейная, найдётся такое число $c \in (a; b)$, что $f(c) \neq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$.

5.225. *Указание.* Рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - e^{-x}$.

5.231. *Указание.* Применить теорему Лагранжа. Обратное утверждение неверно: рассмотреть $f(x) = \sqrt{x}$ на $(0; 1)$.

5.234. *Указание.* Если $g(x) - g(x_0) \neq 0$, то применить теорему Коши. Если $g(x) - g(x_0) = 0$, то показать, что $f(x) - f(x_0) = 0$.

5.235. *Указание.* Применить теорему Коши к функциям $u = \dfrac{f(x)}{x}$ и $v = \dfrac{1}{x}$ на $[x_1; x_2]$.

5.236. а) $y = x$, $y = -x$; б) $y + 2 = 2(1 + \ln 2)(x + 1)$, $y + 2 = -\dfrac{1}{2(1 + \ln 2)}(x + 1)$.

5.237. а) $y = \pi x$, $y = -\dfrac{1}{\pi}x$; б) $y = -\dfrac{\pi}{2}(x - 1)$, $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 1)$.

5.238. а) $y - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi + \sqrt{3}}{3}(x - 1)$, $y - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{3}{\pi + \sqrt{3}}(x - 1)$;

б) $y - \pi = \dfrac{2\sqrt{3}\pi + 9}{3}(x - \sqrt{3})$, $y - \pi = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}\pi + 9}(x - \sqrt{3})$.

5.239. а) $y - \dfrac{1}{64} = \dfrac{6-\pi}{32}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$, $y - \dfrac{1}{64} = \dfrac{32}{\pi - 6}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$; б) $y = -\dfrac{\pi}{8}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, $y = \dfrac{8}{\pi}\left(x - \dfrac{1}{12}\right)$.

5.240. а) $y = x$, $y = -x$; б) $y = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$, $x = \dfrac{3}{4}$; в) $x = 1$, $y = 0$.

5.241. а) Полукасательная $x = 0$, $y \geqslant 0$;

б) $y - \dfrac{\sqrt[3]{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{49}}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, $y - \dfrac{\sqrt[3]{7}}{2} = -\dfrac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

5.242. а) $y = -x + 3$, $y = x + 1$; б) $x = -3$, $y = 0$; в) $y = x - 3$, $y = -x - 1$.

5.243. а) Полукасательная $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x - 2)$, $x \leqslant 2$; б) $y = -\dfrac{2}{3}x$, $y = \dfrac{3}{2}x$;

в) $y - (3 + 2\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{3}x$, $y - (3 + 2\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{\sqrt{3} + 1}x$.

5.244. а) $y + 2 = 0$, $x + 3 = 0$;

б) $y + 4 - 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{2}(2 - \sqrt{2})(x + 1)$, $y + 4 - 2\sqrt{2} = -\dfrac{2}{3(2 - \sqrt{2})}(x + 1)$;

в) полукасательная $y - 2 = 3(x - 1)$, $x \leqslant 1$, $y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x - 1)$.

5.245. а) $y - 1 = -x$, $y - 1 = x$; б) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$; в) $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$.

5.246. а) $y = \dfrac{2}{\pi^3}x$, $y = -\dfrac{\pi^3}{2}x$; б) $y + \dfrac{\pi}{4} - 1 = \dfrac{1}{4\pi}(x - \pi)$, $y + \dfrac{\pi}{4} - 1 = -4\pi(x - \pi)$;

в) $x = 2\pi$, $y = 2 - \operatorname{arctg} 2$.

5.247. а) $y = x + \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y = -x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и $y = x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y = -x + \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; б) $x = a$, $y = 0$.

5.248. $y = 3$, $x = 1$ в точке $(1, 3)$;

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$, $y + 2 = -2(x - 1)$ в точке $(1, -2)$.

5.249. $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;
$y-2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y-2=-\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$.
5.250. $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$, $y-1=-2(x-2)$. **5.251.** $x=2a$, $x=-\frac{a}{4}$. **5.252.** $\operatorname{arctg} 3$.
5.253. $\operatorname{arctg}\frac{9}{7}$. **5.254.** $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$ в точках $(1, 2)$ и $(3, 6)$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ в точке $(2, 4)$.
5.255. $\operatorname{arctg}\frac{11\sqrt{3}}{3}$. **5.256.** $\operatorname{arctg} 2$. *Указание.* Показать, что точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения.
5.257. $\frac{\pi}{3}$. *Указание.* Уравнения данных кривых представить в виде $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$, полагая $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$.
5.258. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$. *Указание.* См. предыдущую задачу. **5.259.** $\pi/2$.
5.260. а) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$. **5.261.** $\frac{\pi}{3}$. **5.262.** $R=\sqrt{3}$.
5.272. Убывает на $(-\infty; 0]$, $[2; +\infty)$; возрастает на $[0; 2]$; $x=0$ — т. мин.; $x=2$ — т. лок. макс.
5.273. Возрастает на $(-\infty; 0]$, $\left[\frac{4}{11}; +\infty\right)$; убывает на $\left[0; \frac{4}{11}\right]$; $x=0$ — т. лок. макс.; $x=\frac{4}{11}$ — т. лок. мин.
5.274. Убывает на $(-\infty; -1)$, $\left[\frac{1}{9}; 1\right)$, $[3; +\infty)$; возрастает на $\left(-1; \frac{1}{9}\right]$, $(1; 3]$; $x=\frac{1}{9}$ и $x=3$ — т. лок. макс.
5.275. Возрастает на луче $\left(-\infty; -\frac{3}{\sqrt{11}}\right]$, убывает на отрезке $\left[-\frac{3}{\sqrt{11}}; \frac{3}{\sqrt{11}}\right]$, возрастает на луче $\left[\frac{3}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$, $x=-\frac{3}{\sqrt{11}}$ — точка локального максимума, $x=\frac{3}{\sqrt{11}}$ — точка локального минимума.
5.276. Убывает на $(0; 1]$, $[e^4; +\infty)$; возрастает на $[1; e^4]$; $x=1$ — т. мин.; $x=e^4$ — т. лок. макс.
5.277. Возрастает на $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; убывает на $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, — т. лок. макс.; $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$, — т. лок. мин.
5.278. Убывает на $(0; +\infty)$.
5.279. Убывает на $\left(0; \frac{1}{e}\right]$; возрастает на $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$; $x=\frac{1}{e}$ — т. мин.
5.280. Возрастает на $\mathbb{R}$. **5.281.** Возрастает на отрезке $[-1; 0]$, убывает на луче $[0; +\infty)$, $x=-1$ — точка краевого минимума, $x=0$ — точка локального максимума.
5.282. Возрастает на $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$, $\left[0; \frac{1}{4}\right]$; убывает на $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$, $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$; $x=\pm\frac{1}{2}$ — краевой мин.; $x=\pm\frac{1}{4}$ — т. макс.; $x=0$ — т. лок. мин.
5.284. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$.
5.285. $e^{\pi}>\pi^{e}$. **5.286.** $2^{\sqrt{2}}<e$. **5.299, 5.300.** *Указание.* Сделать замену $x=\frac{1}{t}$.
5.317. $\max f=f(4)=76$, $\min f=f(1)=-5$.
5.318. а) $\max f=f(-3)=29$, $\min f=f(1)=-3$;
б) $\max f=f(-1)=13$, $\min f=f(0)=2$; в) $\max f=f(4)=78$, $\min f=f(-6)=-52$.
5.319. а) $\max f=f(-2)=5e^{-2}$, $\min f=f(0)=-1$;
б) $\max f=f(2)=e^2$, $\min f=f(1)=-e$; в) $\max f=f(-1)=\frac{1}{e}$, $\min f=f(0)=-1$.
5.320. $\max f=f(1)=\frac{\pi}{2}$, $\min f=f(0)=1$.
5.321. $\max f=f(-2)=229$, $\min f=f(-1)=0$.
5.322. а) $\sup f=f(5)=\frac{7}{5}$, $\inf f=f(+\infty)=1$; б) $\sup f=f(5)=\frac{7}{5}$, $\inf f=f(-2)=0$;
в) $\sup f=f(2)=\frac{8}{7}$, $\inf f=f(-2)=0$.

Указание. Пользуясь основными разложениями элементарных функций в нуле, выписать многочлен $T_n(x; f, 0)$ и воспользоваться единственностью многочлена Тейлора.

5.394. а) $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$, $f^{(2k)}(0)=0$, $k\in\mathbb{N}$;

$$T_{2k+1}(x; f, 0)=T_{2k+2}(x; f, 0)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1};$$

б) $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(2k)!$, $f^{(2k)}(0)=0$, $k\in\mathbb{N}$;

$$T_{2k+1}(x; f, 0)=T_{2k+2}(x; f, 0)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Указание. Рассмотреть производную данной функции и воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

5.395. а) 3,162; б) 2,963; в) 0,340.

5.396. а) $a+(x-a)-\dfrac{1}{4a}(x-a)^2-\dfrac{(x-a)^3}{8a^2}$; б) $a+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{28}{81}x^3$;

в) $5(x-1)+130(x-1)^3$; г) $x+x^3$.

5.397. $\frac{1}{2}$. **5.398.** $\frac{1}{2}$. **5.399.** 2. **5.400.** 1. **5.401.** $\frac{1}{2}$. **5.402.** 1. **5.403.** $\frac{1}{6}$.

5.404. 0. **5.405.** -1. **5.406.** $-\frac{1}{2}$. **5.407.** 0. **5.408.** 0. **5.409.** 0. **5.410.** 2π.

5.411. $\frac{1}{2}$. **5.412.** $\frac{1}{2}$. **5.413.** $\frac{1}{2}$. **5.414.** 0. **5.415.** $\frac{2}{3}$. **5.416.** -1. **5.417.** $\frac{\pi^2}{6}$.

5.418. e. **5.419.** 1. **5.420.** 2. **5.421.** 1. **5.422.** $e^{1/\pi}$. **5.423.** $e^{1/\pi}$. **5.424.** $e^{2/\pi}$.

5.425. e. **5.426.** 1. **5.427.** $\sqrt{e}$. **5.428.** $e^{-1/3}$. **5.429.** 1. **5.430.** 1.

5.434. Не выполнены условия $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$.

5.435. а) $a=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-\frac{1}{3}$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=\frac{1}{5}$;

б) $a=1$, $f'(0)=\frac{1}{2}$, $f''(0)=\frac{1}{3}$, $f'''(0)=\frac{1}{4}$, $f^{(4)}(0)=\frac{1}{5}$;

в) $a=0$, $f'(0)=\frac{1}{3}$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=\frac{2}{15}$, $f^{(4)}(0)=0$.

5.436. *Указание.* Применить правило Лопиталя к пределу $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}$. **5.439.** $\frac{1}{2}$.

5.440. *Указание.* Использовать разложение по формуле Тейлора первого порядка функции f в произвольной точке x с приращениями $h=-x$ и $h=1-x$.

5.441. *Указание.* Для произвольного $\varepsilon>0$ рассмотреть луч $(a_\varepsilon; +\infty)$, на котором выполнено неравенство $|f(x)|<\varepsilon^2$, и применить к разности $f(x+\varepsilon)-f(x)$ формулу Тейлора.

5.442. *Указание.* Воспользоваться формулой Тейлора на отрезках $[0; c]$ и $[c; 1]$, где c — точка минимума функции f на отрезке $[0; 1]$.

5.443. *Указание.* Воспользоваться формулой Тейлора на отрезках $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$.

5.444. *Указание.* Предполагая противное, показать, что $f''(x)$ сохраняет знак на всей прямой, а затем, пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получить противоречие с ограниченностью функции f.

5.445. *Указание.* Воспользоваться формулой Тейлора на отрезках $[x-h; x]$ и $[x; x+h]$, $h>0$.

5.446. *Указание.* Воспользоваться формулой Тейлора на отрезках $[-1; 0]$ и $[0; 1]$.

5.447. *Указание.* Показать, что $P^{(j)}(0)=0$, $j=0, 1, \ldots, m$.

5.449. *Указание.* Показать по индукции, что для любого целого $k\geqslant 0$ существует сходящаяся к нулю положительная монотонная последовательность точек $\{u_n\}$, в каждой из которых $f^{(k)}(u_n)=0$, откуда следует, что $f^{(k)}(0)=0$ для любого на-