Глава 4

Предел и непрерывность функций

§ 4.1. Предел функции

4.1.1. Предел функции в точке

Напомним, что для любого $\delta > 0$ через $U_\delta(a)$ обозначается δ-окрестность точки a, а через $\mathring{U}_\delta(a)$ — её проколотая δ-окрестность, $\mathring{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$ (см. § 2.6). Иначе говоря,

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < \delta\} = (a-\delta;\, a+\delta),$$

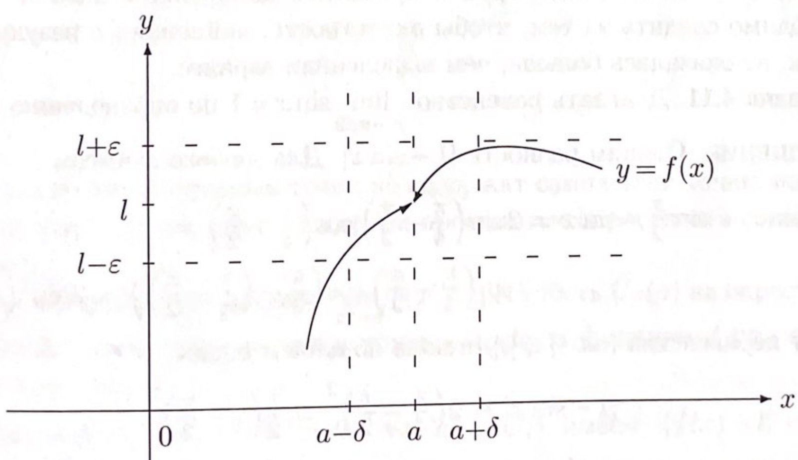
$$\mathring{U}_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta;\, a) \cup (a;\, a+\delta).$$

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение. Число l называется *пределом* функции f в точке a (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$), если для любого положительного числа ε существует такая проколотая δ-окрестность $\mathring{U}_\delta(a)$, что для любого x из этой проколотой окрестности выполнено неравенство $|f(x)-l| < \varepsilon$. С использованием кванторов это определение записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \quad \text{имеем} \quad |f(x)-l| < \varepsilon.$$

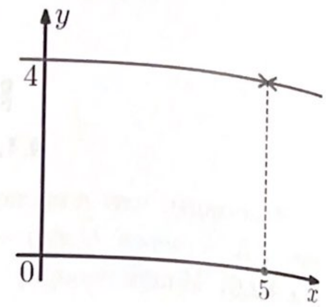
Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, то говорят также, что функция $f(x)$ *стремится* к l при $x \to a$ (запись: $f(x) \to l$, $x \to a$). При этом если $l = 0$, то функцию называют *бесконечно малой*.



Внимание! В определении $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ нет никаких условий на значение $f(a)$; более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a. Поэтому ни неопределённость в точке a, ни значение $f(a)$ не влияют на существование и величину $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Задача 4.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=4$, если

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=5,\\ 4, & x\neq 5.\end{cases}$$



Решение. Поскольку разность $f(x)-4$ равна нулю для всех значений x, кроме $x=5$ (т. е. в любой проколотой δ-окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(5)$), из определения предела следует, что $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=4$. □

Задача 4.3. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to -3} x^2=9$ по определению предела.

Решение. Необходимо оценить $|x^2-9|=|x-3|\cdot|x+3|$. Множитель $|x-3|$ не является ограниченным на всей числовой прямой, поэтому оценку произведения сделать проще, если выделить некоторую, например, 1-окрестность точки $a=-3$, а именно интервал $(-4;-2)$. Для всех $x\in(-4;-2)$ имеем $|x-3|<7$, следовательно, $|x^2-9|<7|x+3|$. Поскольку δ-окрестность точки $a=-3$, представляющая собой интервал $(-3-\delta;-3+\delta)$, не должна выходить за пределы интервала $(-4;-2)$, получаем $\delta=\min\{1,\varepsilon/7\}$, и тогда из неравенства $0<|x+3|<\delta$ следует неравенство $|x^2-9|<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to -3} x^2=9$. □

Обратите внимание: мы не решаем неравенство $|x^2-9|<\varepsilon$, т. е. не находим множество всех тех и только тех значений x, для которых оно верно. Нас интересует только наличие такой окрестности точки $a=-3$, в которой это неравенство выполняется. Выполняется оно вне этой окрестности или нет, нас не интересует. В такой ситуации бывает удобно заранее выделить некоторую окрестность точки a, в которой и проводить дальнейшие оценки. При этом необходимо следить за тем, чтобы окрестность, найденная в результате этих оценок, не оказалась больше, чем выделенная заранее.

Задача 4.11. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sin x=1$ по определению предела.

Решение. Оценим разность $|1-\sin x|$. Для любого x имеем

$$1-\sin x=\sin\frac{\pi}{2}-\sin x=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=$$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

В силу неравенства $|\sin t|\leqslant|t|$ отсюда получаем оценку

$$|1-\sin x|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Следовательно, если зафиксировать $\varepsilon>0$ и положить $\delta=\sqrt{2\varepsilon}>0$, то из неравенства $0<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ будет следовать неравенство $|1-\sin x|<\frac{\delta^2}{2}=\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sin x=1$. □

Если в определении предела функции $f(x)$ при $x \to a$ заменить проколотую окрестность $\mathring{U}_\delta(a)$ на правую $(U_\delta^+(a) = (a;\, a+\delta))$ или левую $(U_\delta^-(a) = (a-\delta;\, a))$ полуокрестность точки a, то получим определение *односторонних* пределов функции f в точке a:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \ \forall x \in (a;\, a+\delta)\ \text{ имеем }\ |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \ \forall x \in (a-\delta;\, a)\ \text{ имеем }\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

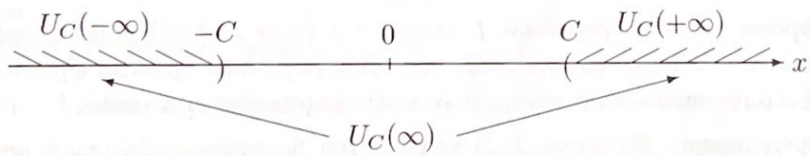
Эти пределы называют *правосторонним* (или *пределом справа*) и *левосторонним* (или *пределом слева*) пределами в точке a соответственно и обозначают также как $f(a+0)$ и $f(a-0)$.

Задача 4.24. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to 0-} 2^{1/x} = 0$ по определению одностороннего предела.

Решение. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ требуется подобрать такое $\delta > 0$, чтобы неравенство $-\delta < x < 0$ влекло неравенство $|2^{1/x} - 0| = 2^{1/x} < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon \in (0;\, 1)$. Преобразуя равносильным образом последнее неравенство, приходим к неравенству $1/x < \log_2 \varepsilon$, и, учитывая отрицательность x и $\log_2 \varepsilon$, — к неравенству $x > 1/\log_2 \varepsilon$. Таким образом, достаточно положить $\delta = -1/\log_2 \varepsilon$. □

Окрестности *несобственных точек* ∞, $\pm\infty$ числовой прямой вводятся следующим образом $(C > 0)$:

- $U_C(\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| > C\} = (-\infty;\, -C) \cup (C;\, +\infty)$;
- $U_C(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x > C\} = (C;\, +\infty)$;
- $U_C(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x < -C\} = (-\infty;\, -C)$.



Окрестности несобственных точек не содержат самих этих точек, поэтому естественно считать, что для таких точек проколотые окрестности совпадают с обычными.

Заменяя в определении предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ окрестность $\mathring{U}_\delta(a)$ на окрестность несобственной точки, получаем определения предела функции f при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\colon\ \forall x,\, |x| > C,\ \ \text{имеем}\ \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\colon\ \forall x > C\ \ \text{имеем}\ \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\colon\ \forall x < -C\ \ \text{имеем}\ \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Замечание. Пределы функции f при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ можно рассматривать как односторонние по отношению к $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Задача 4.32. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+px+q} = 0$ по определению предела в несобственной точке.

Решение. В силу свойств квадратного трёхчлена найдётся такое число $C > 0$, что при $|x| > C$ выполняются соотношения $|x^2+px+q| = x^2+px+q$ и $x^2+px+q > \dfrac{x^2}{2}$. Тогда при $|x| > C$ имеем

$$\left|\frac{x}{x^2+px+q}\right| = \frac{|x|}{x^2+px+q} < \frac{|x|}{x^2/2} = \frac{2}{|x|}.$$

Таким образом, если $C_1 = \max\{C, 2/\varepsilon\}$, то из неравенства $|x| > C_1$ вытекает неравенство $\dfrac{2}{|x|} < \varepsilon$, и поэтому

$$\left|\frac{x}{x^2+px+q}\right| < \frac{2}{|x|} < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+px+q} = 0.$$ □

Все рассмотренные выше разновидности предела функции можно уложить в следующую схему:

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = l \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\mathring{U}(\omega)\colon \ \forall x \in \mathring{U}(\omega) \ \text{ имеем } \ f(x) \in U_\varepsilon(l). \qquad (1)$$

Запись $x \to \omega$ может означать предел в собственной точке $\omega = a$, односторонний предел в точке a ($\omega = a+$ или $\omega = a-$), а также предел в несобственной точке ($\omega = \infty$, $\omega = +\infty$ или $\omega = -\infty$), при этом

- $\mathring{U}(a) = \mathring{U}_\delta(a)$, $\mathring{U}(a+) = U_\delta^+(a)$, $\mathring{U}(a-) = U_\delta^-(a)$, $\delta > 0$;
- $\mathring{U}(\infty) = U_C(\infty)$, $\mathring{U}(+\infty) = U_C(+\infty)$, $\mathring{U}(-\infty) = U_C(-\infty)$, $C > 0$.

Теорема. *Предел функции f при $x \to a$ (или $x \to \infty$) существует и равен l тогда и только тогда, когда оба односторонних предела функции f при $x \to a\pm$ (или, соответственно, $x \to \pm\infty$) существуют и равны l.*

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого $C > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}_\delta(a)$, что для любых $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ имеем $|f(x)| > C$.

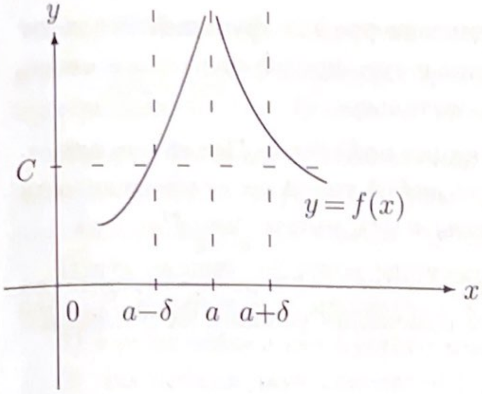
Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)| > C$ на $f(x) > C$ ($f(x) < -C$), получаем определение положительной (отрицательной) бесконечно большой функции.

Коротко утверждение, что функция $f(x)$ при $x \to a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой), записывается так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

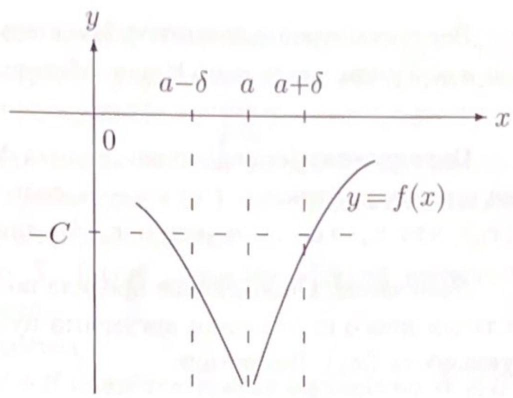
Формальное определение бесконечно большой функции можно получить из определения предела функции заменой последнего неравенства:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \forall C > 0 \ \exists\delta > 0\colon \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \text{ имеем } \ |f(x)| > C.$$

Аналогичным образом можно получить кванторные определения положительной и отрицательной бесконечно большой функции.



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Задача 4.57. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ по определению бесконечно большой функции.

Решение. Пусть $C > 0$. Неравенство $\left|\frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}}\right| > C$ равносильно неравенству $\sqrt[2n+1]{|x|} < \frac{1}{C}$, или $|x| < \frac{1}{C^{2n+1}}$. Таким образом, полагая $\delta = \frac{1}{C^{2n+1}} > 0$ получаем, что $\left|\frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}}\right| > C$ при всех $x \in \mathring{U}_\delta(0)$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = \infty$. □

Общая форма (1) записи предела функции без труда распространяется на бесконечно большие функции: достаточно заменить ε-окрестность точки l на соответствующую окрестность несобственной точки.

Задача 4.40. Записать равенство $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ формально с помощью кванторов.

Решение. В данном случае $\omega = a-$ и

$$\mathring{U}(\omega) = U_\delta^-(a) = (a-\delta; a), \quad U(l) = U_C(\infty) = (-\infty; -C) \cup (C; +\infty),$$

где $\delta > 0$ и $C > 0$. Следовательно, формальная запись выглядит так:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty \iff \forall C > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta^-(a) \ \text{ имеем } \ f(x) \in U_C(\infty),$$

или

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty \iff \forall C > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in (a-\delta; a) \ \text{ имеем } \ |f(x)| > C.$$

□

Задача 4.69. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x = +\infty$ по определению бесконечно большой функции.

Решение. Для произвольного $C > 0$ следует подобрать такое $A = A(C) > 0$, чтобы неравенство $x < -A$ влекло бы неравенство $\sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x > C$. Точно решить последнее неравенство невозможно, поэтому усилим его в предположении, что $x < -1$ и поэтому $\operatorname{arctg} x < -\pi/4$: получаем $\sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x > -\pi \sqrt[3]{x}/4$, и поэтому неравенство $\sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x > C$ будет выполнено, если $-\pi\sqrt[3]{x}/4 > C$, т. е. $x < -(4C/\pi)^3$. Итак, можно положить $A = \max(1, (4C/\pi)^3)$. □

Все рассмотренные выше формы определения предела функции называют определением предела по Коши. Можно определить предел функции и иначе, с использованием понятия предела последовательности.

Определение (определение предела функции по Гейне). Число l называется пределом функции f при $x \to a$, если для любой такой последовательности (x_n), что $x_n \to a$ при $n \to \infty$ и $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Замечание. Определение предела по Гейне может быть распространено на случаи иного стремления аргумента путём изменения условия на последовательность (x_n). Например:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff \forall (x_n),\, x_n \to \infty, \text{ имеем } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l;$$

$$f(a+0) = l \iff \forall (x_n),\, x_n \to a,\, x_n > a, \text{ имеем } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Определения предела по Коши и по Гейне равносильны, т. е. если существует один из них, то существует и другой, и они равны. В качестве основного мы используем определение предела по Коши, однако, для решения некоторых задач проще применять определение по Гейне. Например, доказывать отсутствие предела функции в точке удобно с помощью отрицания определения предела по Гейне.

Утверждение. *Пусть существуют две такие последовательности* (x_n) *и* (y_n), *что*
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;
(ii) $x_n \neq a$ *и* $y_n \neq a$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$;
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.
Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *не существует, и функция* f *не является бесконечно большой.*

Задача 4.73. Доказать, что у функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ нет предела при $x \to 0$.

Решение. В соответствии с предыдущим утверждением, достаточно найти две такие бесконечно малые последовательности (x_n) и (y_n), что пределы последовательностей $(f(x_n))$ и $(f(y_n))$ различны. В качестве таких последовательностей можно взять, например, $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$, $y_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$. Эти последовательности стремятся к нулю, однако

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin \pi n = 0, \qquad f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1,$$

т. е. $0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$. □

Теорема (критерий Коши). *Для существования предела* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathring{U}(\omega) \;\; \forall x, y \in \mathring{U}(\omega) \text{ имеем } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши удобен в том числе для доказательства отсутствия предела функции. Так, для решения предыдущей задачи достаточно было заметить, что в любой проколотой окрестности нуля найдутся точки вида $x = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$ и $y = \dfrac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}$, для которых модуль $|f(x) - f(y)|$ равен 2, то есть не меньше произвольного $\varepsilon > 0$. Поэтому в силу критерия Коши $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

Предел функции в собственной или несобственной точке, предел последовательности и другие пределы, встречающиеся в курсе математического анализа, являются частными случаями предела по базе.

Пусть задано непустое множество X. *Базой* называется такой непустой набор $\mathcal{B}$ подмножеств множества X, что

1) в этом наборе нет пустого множества;

2) для всяких двух множеств $U, V \in \mathcal{B}$ найдётся третье множество $W \in \mathcal{B}$, для которого справедливо включение $W \subset U \cap V$.

Пусть задана функция $f\colon X \to \mathbb{R}$. Число b называется *пределом функции* f *по базе* $\mathcal{B}$ (пишем $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = b$), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой элемент U базы $\mathcal{B}$, что для всех $x \in U$ справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Примерами баз служат множества вида $\{n \in \mathbb{N}\colon n > N\}$ (предел по такой базе — предел последовательности) и проколотые окрестности точки a (предел по этой базе — предел функции в точке a). Если функция f определена не во всей проколотой окрестности собственной или несобственной точки ω, но ω является предельной точкой области определения этой функции, то для определения $\lim\limits_{x \to \omega} f(x)$ в качестве базы рассматривают проколотые окрестности точки ω, пересечённые с областью определения функции f. При этом условие предельности точки ω гарантирует выполнение свойства 2) этой базы (проверьте!).

Для предела по базе справедливы утверждения о его единственности, линейности и монотонности, являющиеся обобщениями соответствующих утверждений о пределе последовательности или пределе функции в точке.

4.1.2. Непрерывность функции в точке

Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a.

Задача 4.81. Показать, что функция $f(x) = kx + b$ непрерывна в каждой точке своей области определения.

Решение. Линейная функция определена всюду на $\mathbb{R}$, поэтому требуется установить равенство $\lim\limits_{x \to x_0} (kx + b) = kx_0 + b$, $x_0 \in \mathbb{R}$. При $k = 0$ равенство выполнено (см. задачу 4.1). В противном случае для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon/|k|$, тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| = |kx - kx_0| = |k||x - x_0| < |k|\delta = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Задача 4.87. Показать, что функция $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ непрерывна в каждой точке своей области определения.

Решение. При $a = 0$ имеем $f(x) = |x|$, а эта функция непрерывна в силу задачи 4.83. Пусть $a \neq 0$, докажем равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ для любого

$x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\left|\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x_0^2+a^2}\right| = \frac{|x^2+a^2-x_0^2-a^2|}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x_0^2+a^2}} \leqslant \frac{|x^2-x_0^2|}{\sqrt{x_0^2+a^2}} = \frac{|x+x_0|}{\sqrt{x_0^2+a^2}}|x-x_0|.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{x_0^2+a^2}}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Тогда из неравенства $0 < |x-x_0| < \delta$ следует, что $|x+x_0| \leqslant 2|x_0|+1$, и поэтому

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{2|x_0|+1}{\sqrt{x_0^2+a^2}}\delta \leqslant \varepsilon,$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. □

В дальнейшем при нахождении пределов часто будет использоваться следующая теорема.

Теорема. *Все основные элементарные функции*[1] *непрерывны в каждой внутренней точке своей области определения.*

Определение. Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой правой (левой) полуокрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ $(\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a))$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* (*непрерывной слева*) *в точке* a.

Задача 4.94. Исследовать на непрерывность справа и слева функцию $f(x) = [x]$ в каждой точке.

Решение. Согласно задачам 4.19 и 4.20 имеем $f(n+0) = n = [n] = f(n)$, $f(n-0) = n-1$, поэтому функция $f(x)$ непрерывна справа в целых точках (но не слева!). На каждом интервале вида $(n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, функция $f(x)$ постоянна, и поэтому $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$ при всех $x_0 \in (n; n+1)$, т. е. функция f непрерывна в каждой нецелой точке. □

Приведённая выше теорема о непрерывности основных элементарных функций допускает следующее уточнение.

Теорема. *Все основные элементарные функции непрерывны справа (слева) в каждой крайней левой (крайней правой) точке своей области определения.*

4.1.3. Арифметические свойства предела

Теорема. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to\omega} g(x)$, *то*

а) $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\omega} f(x) + \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\omega} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$;

в) если $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\omega} f(x)}{\lim\limits_{x\to\omega} g(x)}$.

Следствие. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то в этой точке непрерывны также функции* $f(x) \pm g(x)$ *и* $f(x)g(x)$; *если, кроме того,* $g(x_0) \neq 0$, *то непрерывна и функция* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

---

[1] См. определение на с. 6.