$x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\left|\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x_0^2+a^2}\right| = \frac{|x^2+a^2-x_0^2-a^2|}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x_0^2+a^2}} \leqslant \frac{|x^2-x_0^2|}{\sqrt{x_0^2+a^2}} = \frac{|x+x_0|}{\sqrt{x_0^2+a^2}}|x-x_0|.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{x_0^2+a^2}}{2|x_0|+1}, 1\right\}$. Тогда из неравенства $0<|x-x_0|<\delta$ следует, что $|x+x_0| \leqslant 2|x_0|+1$, и поэтому

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{2|x_0|+1}{\sqrt{x_0^2+a^2}}\delta \leqslant \varepsilon,$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. □

В дальнейшем при нахождении пределов часто будет использоваться следующая теорема.

Теорема. *Все основные элементарные функции*[1] *непрерывны в каждой внутренней точке своей области определения.*

Определение. Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой правой (левой) полуокрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)\right)$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* (*непрерывной слева*) *в точке* a.

Задача 4.94. Исследовать на непрерывность справа и слева функцию $f(x)=[x]$ в каждой точке.

Решение. Согласно задачам 4.19 и 4.20 имеем $f(n+0)=n=[n]=f(n)$, $f(n-0)=n-1$, поэтому функция $f(x)$ непрерывна справа в целых точках (но не слева!). На каждом интервале вида $(n; n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, функция $f(x)$ постоянна, и поэтому $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ при всех $x_0 \in (n; n+1)$, т. е. функция f непрерывна в каждой нецелой точке. □

Приведённая выше теорема о непрерывности основных элементарных функций допускает следующее уточнение.

Теорема. *Все основные элементарные функции непрерывны справа (слева) в каждой крайней левой (крайней правой) точке своей области определения.*

4.1.3. Арифметические свойства предела

Теорема. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to\omega} g(x)$, *то*

а) $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\omega} f(x) + \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\omega} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$;

в) если $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\omega} f(x)}{\lim\limits_{x\to\omega} g(x)}$.

Следствие. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то в этой точке непрерывны также функции* $f(x)\pm g(x)$ *и* $f(x)g(x)$; *если, кроме того,* $g(x_0)\neq 0$, *то непрерывна и функция* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

---

[1] См. определение на с. 6.

Задача 4.105. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. С помощью теоремы о пределе суммы и произведения находим $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)=(-1)^3-1=-2$, $\quad\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x+3)=(-1)^2-4\cdot(-1)+3=8$. Предел знаменателя не равен нулю, поэтому применима теорема о пределе частного. Следовательно, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x+3)}=-\dfrac{1}{4}$. □

Задача 4.110. Доказать непрерывность функции

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n$$

на области определения.

Решение. Функция f является многочленом, поэтому $D(f)=\mathbb{R}$. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения, получаем

$$\lim_{x\to a}(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n)=c_0a^n+c_1a^{n-1}+\ldots+c_{n-1}a+c_n,$$

тем самым непрерывность многочлена в каждой точке $a\in\mathbb{R}$ доказана. □

Следующие таблицы содержат утверждения о сумме и произведении функций, имеющих предел или являющихся бесконечно большими.

		$\lim\limits_{x\to\omega} g(x)$			
	$+$	l_2	∞	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	l_1+l_2	∞	$+\infty$	$-\infty$
	∞	∞	?	?	?
	$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	?
	$-\infty$	$-\infty$	?	?	$-\infty$

Таблица 4.1. $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x)+g(x))$

		$\lim\limits_{x\to\omega} g(x)$					
	$\times$	$l_2>0$	0	$l_2<0$	∞	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l_1>0$	l_1l_2	0	l_1l_2	∞	$+\infty$	$-\infty$
	0	0	0	0	?	?	?
	$l_1<0$	l_1l_2	0	l_1l_2	∞	$-\infty$	$+\infty$
	∞	∞	?	∞	∞	∞	∞
	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	∞	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	∞	$-\infty$	$+\infty$

Таблица 4.2. $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)g(x)$

Через «?» в таблицах обозначена ситуация, в которой ничего утверждать о существовании и величине предела, вообще говоря, нельзя. В этих случаях неприменимы теоремы об арифметических свойствах предела функции, поэтому говорят, что возникает *неопределённость* того или иного вида. Например, если $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)=\lim\limits_{x\to\omega} g(x)=0$, то нахождение предела отношения $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

называют *раскрытием неопределённости* вида $\frac{0}{0}$. Другие неопределённости аналогичным образом записываются в виде $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ и т. д. Для раскрытия неопределённостей применяют различные методы, которые будут рассмотрены далее.

Задача 4.125. Найти $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2^x}$.

Решение. Из таблицы для предела произведения находим, что

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \lim_{x \to -\infty} 2^{-x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

□

Задача 4.129. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^4+1}$.

Решение. В заданном виде данной величины и числитель, и знаменатель стремятся к $+\infty$, и мы имеем неопределённость. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель на x^2. Теперь к знаменателю $x^2 + 1/x^2$ применим один из пунктов таблицы 4.1, согласно которому $+\infty + 0 = +\infty$, а ко всей дроби $\frac{1}{x^2+1/x^2}$ — один из результатов задачи 4.115: $\frac{1}{+\infty} = 0$. □

4.1.4. Принцип двустороннего ограничения

Теорема (принцип двустороннего ограничения). *Пусть* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *при всех* $x \in \mathring{U}(\omega)$ *и* $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \lim\limits_{x \to \omega} h(x) = l$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = l$.

Для бесконечно больших величин принцип двустороннего ограничения можно сформулировать следующим образом:

если $f(x) \geqslant g(x)$ *при всех* $x \in \mathring{U}(\omega)$ *и* $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = +\infty$, *то* $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty$;

если $f(x) \leqslant g(x)$ *при всех* $x \in \mathring{U}(\omega)$ *и* $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = -\infty$, *то* $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = -\infty$.

Задача 4.135. Найти $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Решение. Пользуясь неравенством $-x^2 \leqslant x^2 \sin \frac{1}{x} \leqslant x^2$ и принципом двустороннего ограничения, получаем, что $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$. □

Теорема. *Если при* $x \to \omega$ *функция* $f(x)$ *бесконечно мала, а функция* $g(x)$ *локально (т. е. в некоторой* $\mathring{U}(\omega)$*) ограничена, то произведение* $f(x)g(x)$ *является бесконечно малым при* $x \to \omega$.

Предыдущую задачу также можно было решить с помощью этой теоремы.

Задача 4.137. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{[x]}{x}$.

Решение. Используя элементарную оценку $x - 1 < [x] \leqslant x$, получаем

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1 \text{ при } x > 0, \quad 1 - \frac{1}{x} > \frac{[x]}{x} \geqslant 1 \text{ при } x < 0.$$

По принципу двустороннего ограничения отсюда вытекают соотношения

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$

Ввиду связи односторонних пределов с обычным (см. теорему на с. 214) заключаем, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{[x]}{x} = 1$. □

Задача 4.142. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$.

Решение. *Первый способ.* Поскольку $\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, из принципа двустороннего ограничения вытекает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\cos x}{x}\right)=\infty\cdot 1=\infty$.

Второй способ. Имеем $|x+\cos x|\geqslant |x|-|\cos x|\geqslant |x|-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(|x|-1)=+\infty$, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}|x+\cos x|=+\infty$, что равносильно (см. задачу 4.52) равенству $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)=\infty$. □

4.1.5. Замена переменной и предел композиции

При нахождении пределов часто применяют следующую теорему.

Теорема (о пределе композиции). *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ и существует $\lim\limits_{t\to\omega}x(t)=a$, то $\lim\limits_{t\to\omega}f(x(t))=f(\lim\limits_{t\to\omega}x(t))=f(a)$.*

Следствием этой теоремы является утверждение о непрерывности композиции непрерывных функций.

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $f(x_0)$, то*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)),$$

т. е. функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Например, предел $\lim\limits_{x\to 4\pi}\ln\left(2+\sqrt{1+\sin^2(x/2)}\right)=\ln 3$ может быть найден шестикратным применением теоремы о пределе композиции: $y_1=\dfrac{x}{2}$, $y_2=\sin y_1$, $y_3=y_2^2$, $y_4=1+y_3$, $y_5=\sqrt{y_4}$, $y_6=2+y_5$, $y_7=\ln y_6$.

Задача 4.149. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. В силу непрерывности композиции логарифмической функции и многочлена имеем $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2+4x+2)=\ln 2$. Далее, $\ln(x^{10}+x^3+x^2)=$ $=\ln x^2+\ln(1+x+x^8)$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\ln(x^{10}+x^3+x^2) = 2\lim_{x\to 0}\ln|x| + \lim_{x\to 0}\ln(1+x+x^8) = -\infty+0=-\infty.$$

Таким образом, искомый предел равен $\dfrac{\ln 2}{-\infty}=0$. □

Теорема. *Если $\lim\limits_{t\to\omega}x(t)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, то $\lim\limits_{t\to\omega}f(x(t))=l$. Это утверждение также остаётся верным, если под l понимается не число, а несобственная точка числовой прямой.*

Если обозначить

$$f(\infty)=\lim_{x\to\infty}f(x),\qquad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x),\qquad f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}f(x),$$

то символически утверждение теоремы может быть записано в виде

$$\lim_{t\to\omega}f(x(t)) = f(\lim_{t\to\omega}x(t)) \tag{2}$$

(ср. с теоремой о пределе композиции). Таким образом, равенство (4.2) справедливо в случае конечного предела $\lim\limits_{t\to\omega} x(t)$ при условии непрерывности функции f и в случае бесконечного предела $\lim\limits_{t\to\omega} x(t)$ при условии, что правая часть (4.2) имеет смысл.

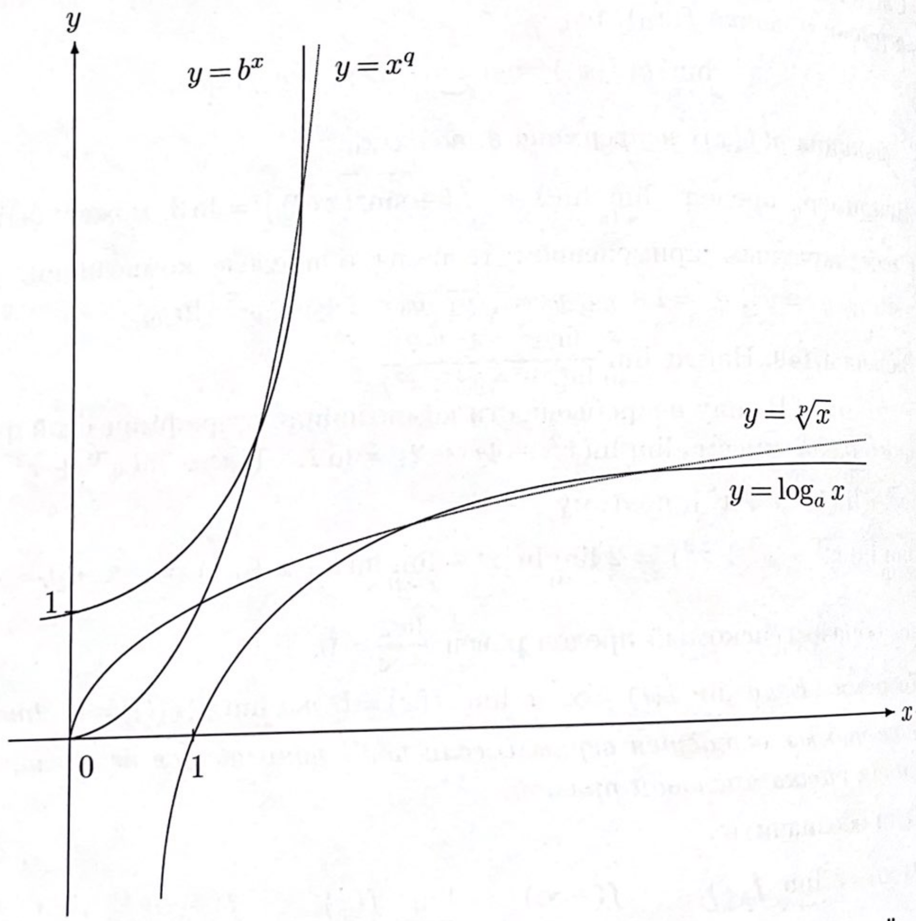
На практике стоящие за равенством (4.2) теоремы часто применяются в виде замены переменной под знаком предела: если надо найти левую часть (4.2), то вместо неё находят правую, т. е. $\lim\limits_{x\to\omega_1} f(x)$, где $\omega_1 = \lim\limits_{t\to\omega} x(t)$.

Задача 4.155. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$ (неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$).

Решение. В главе 2 методом математической индукции было доказано (см. пример 2.2 на с. 109), что для всех натуральных чисел $n \geqslant 5$ имеем $n^2 < 2^n$. Пользуясь монотонностью показательной функции 2^x, получаем при $x > 4$

$$2^{x+1} \geqslant 2^{[x]+1} > ([x]+1)^2 \geqslant x^2,$$

где $[x]$ — целая часть x. Поэтому при $x > 4$ имеем $0 < \dfrac{x}{2^x} < \dfrac{2}{x}$. Применяя принцип двустороннего ограничения, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$. □



Графики логарифмической, степенной и показательной функций $(a, b, p, q > 1)$.

Задача 4.156. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^p}=0$, $a>1$, $p>0$.

Решение. В предыдущей задаче было доказано равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}=0$. Полагая $t=2^x$, отсюда получаем, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_2 t}{t}=0$. Из этого соотношения и равенства $\dfrac{\log_a x}{x^p}=\dfrac{\log_a 2}{p}\cdot\dfrac{\log_2(x^p)}{x^p}$ следует, что при $a>1$ и $p>0$ справедливо равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^p}=0$. □

Задача 4.158. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^q}{a^x}=0$, $a>1$, $q>0$.

Решение. Из полученного в предыдущей задаче равенства $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_a t}{t^{1/q}}=0$ находим, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(\log_a t)^q}{t}=0$, откуда заменой $t=a^x$ приходим к тому, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^q}{a^x}=0$. □

На основании полученных в двух последних задачах соотношений говорят, что при $x\to+\infty$ степенная функция с положительным показателем растёт быстрее логарифмической, а показательная с основанием, большим единицы, — быстрее степенной.

Задача 4.161. Доказать равенство $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x=0$.

Решение. Положим $x=e^{-t}$, тогда условие $x\to 0+$ равносильно условию $t\to+\infty$. Пользуясь результатом задачи 4.158, получаем, что

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{e^t}=0. \qquad \square$$

4.1.6. Предел степенно-показательной функции

Степенно-показательной функцией называется функция вида $u(x)^{v(x)}$, естественной областью определения которой является множество решений неравенства $u(x)>0$. Вводя обозначение $\exp(x)=e^x$, получаем тождество $u(x)^{v(x)}=\exp(v(x)\ln u(x))$, поэтому в силу равенства (4.2) имеем

$$\lim_{x\to\omega} u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to\omega}\exp(v(x)\ln u(x))=\exp\bigl(\lim_{x\to\omega} v(x)\ln u(x)\bigr).$$

Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению предела $\lim\limits_{x\to\omega} v(x)\ln u(x)$. В простейшем случае из непрерывности логарифмической функции и теоремы о пределе произведения получаем следующее утверждение: *если $u(x)\to u_0>0$ и $v(x)\to v_0$ при $x\to\omega$, то*

$$\lim_{x\to\omega} u(x)^{v(x)}=u_0^{v_0}.$$

В частности, из непрерывности функций u и v в точке a при условии $u(a)>0$ следует непрерывность функции u^v в точке a.

Задача 4.165. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\Bigl(\sin\dfrac{\pi x}{4}\Bigr)^{x^2+3}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{\pi x}{4}=\dfrac{1}{\sqrt2}$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\Bigl(\sin\frac{\pi x}{4}\Bigr)^{x^2+3}=\Bigl(\frac{1}{\sqrt2}\Bigr)^4=\frac14. \qquad \square$$

Из таблицы для предела произведения с помощью соотношений $e^{-\infty}=0$, $e^{+\infty}=+\infty$ (см. задачу 4.150), $\ln(0+)=-\infty$ (см. задачу 4.151) получаем таблицу для предела степенно-показательной функции.

	u^v	$\lim\limits_{x\to\omega} v(x)$: $c<0$	0	$c>0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\omega} u(x)$	0	$+\infty$	?	0	0	$+\infty$
	$0<b<1$	b^c	1	b^c	0	$+\infty$
	1	1	1	1	?	?
	$b>1$	b^c	1	b^c	$+\infty$	0
	$+\infty$	0	?	$+\infty$	$+\infty$	0

Таблица 4.3. $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)^{v(x)}$

Задача 4.171. Найти $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac12$ и $\lim\limits_{x\to1}\operatorname{ctg}^2\pi x=+\infty$, получаем

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}=\left(\frac12\right)^{+\infty}=0.$$

□

Задача 4.175. Найти $\lim\limits_{x\to\pi+}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\pi+}\sin^2 x=0$, $\lim\limits_{x\to\pi+}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-\infty$, следовательно

$$\lim_{x\to\pi+}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=0^{-\infty}=+\infty.$$

□

Если предел $\lim\limits_{x\to\omega} v(x)\ln u(x)$ представляет собой неопределённость вида $0\cdot\infty$, то значение исходного предела $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)^{v(x)}$ также не определено. Такое положение возможно в трёх случаях:

1) $\lim\limits_{x\to\omega} v(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)=+\infty$ (символически ∞^0),
2) $\lim\limits_{x\to\omega} v(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)=0$ (символически 0^0),
3) $\lim\limits_{x\to\omega} v(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)=1$ (символически 1^∞).

Неопределённости первых двух типов часто можно раскрыть, используя сравнение скорости роста элементарных функций (см. задачи 4.155–4.162).

Задача 4.179. Найти $\lim\limits_{x\to0+} x^x$ (неопределённость типа 0^0).

Решение. Пользуясь результатом задачи 4.161, получаем, что

$$\lim_{x\to0+} x^x=e^{\lim\limits_{x\to0+} x\ln x}=e^0=1.$$

□

Задача 4.180. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac1x}$ (неопределённость типа ∞^0).

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac1x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (см. задачу 4.156). □

Раскрытие неопределённости типа 1^∞ тесно связано со вторым замечательным пределом и будет рассмотрено далее.