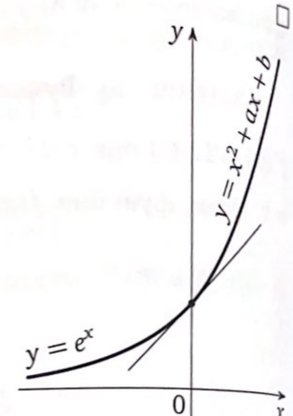
Задача 5.118. Пусть $\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x \geqslant a, \\ g(x), & x<a. \end{cases}$ Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции f и g, чтобы функция φ была дифференцируемой на всей числовой прямой?

Решение. Поскольку $\varphi(x)=f(x)$ при $x>a$ и $\varphi(x)=g(x)$ при $x<a$, условие дифференцируемости f при $x>a$ и g при $x<a$ необходимо и достаточно для дифференцируемости φ на множестве $(-\infty;a)\cup(a;+\infty)$. Для дифференцируемости φ в точке a прежде всего необходимо условие непрерывности: $\varphi(a-0)=\varphi(a+0)=\varphi(a)$, которое в данном случае эквивалентно условию $f(a)=g(a-0)$. Кроме того, требуется выполнение равенства $\varphi'_+(a)=\varphi'_-(a)$, т.е. $f'_+(a)=g'_-(a-0)$ (см. замечание на с. 288). □

Задача 5.119. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ x^2+ax+b, & x>0. \end{cases}$$

Найти такие значения a и b, чтобы f была дифференцируемой на всей числовой прямой.



Решение. Поскольку f должна быть непрерывна в точке 0, получаем

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 1,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=b=e^0=1$, откуда $b=1$. Далее, $f'_+(0)=(x^2+ax+b)'|_{x=0}=a$ и $f'_-(0)=(e^x)'|_{x=0}=1$, следовательно, $f'(0)$ существует, если $a=1$ и $b=1$. При этих значениях a и b функция f дифференцируема на всей числовой прямой. □

5.1.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции $f'(x)$ называется *второй производной функции* f и обозначается f''. Далее определение даётся по индукции: *производная* n-*го порядка* (n-я производная) $f^{(n)}$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$. Для неё также используют обозначение $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Задача 5.138. Показать, что $y^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$, где $y=\sin x$.

Решение. Имеем $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Если $y^{(n-1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$, то

$$y^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}(x))'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

□

Согласно принципу математической индукции формула доказана.

Таблица производных n-го порядка

$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a \quad (a>0)$	$(e^x)^{(n)}=e^x$
$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$	$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$
$(x^m)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$	$(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Всякая основная элементарная функция имеет производные любого порядка в каждой внутренней точке своей области определения (за исключением степенной функции $y=x^a$, которая при $0<a<1$ недифференцируема в нуле). Если функция f дифференцируема n раз на промежутке $\langle a;b\rangle$ и её n-я производная непрерывна на $\langle a;b\rangle$, то функцию f называют n раз непрерывно дифференцируемой на промежутке $\langle a;b\rangle$ и пишут $f\in C^n\langle a;b\rangle$. Если $f\in C^n\langle a;b\rangle$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то пишут $f\in C^\infty\langle a;b\rangle$ и называют функцию f *бесконечно дифференцируемой* на $\langle a;b\rangle$.

Для нахождения n-й производной в некоторых случаях полезно предварительно преобразовать функцию, в частности, рациональную функцию разложить в сумму простейших дробей, понизить степень тригонометрической функции с помощью кратных углов и т. д. Например,

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right),\qquad \ln\frac{1+x}{3x+1}=\ln|1+x|-\ln|3x+1|,$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3),\quad \sin 2x\cos^2 3x=\frac{1}{4}(\sin 8x-\sin 4x)+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

При нахождении производных высших порядков от произведения двух функций полезно пользоваться ***формулой Лейбница***: если каждая из функций $u=f(x)$ и $v=g(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка, то их произведение $u\cdot v$ также имеет n-ю производную в точке x, причём

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)},\quad \text{где } u^{(0)}=u(x),\ v^{(0)}=v(x),\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задача 5.139. Найти $f^{(10)}(x)$, если $f(x)=(x^3+4x^2+2)e^{2x}$.

Решение. Обозначим $u(x)=x^3+4x^2+2$, $v(x)=e^{2x}$, тогда, применяя формулу Лейбница, находим

$$\begin{aligned}((x^3+4x^2+2)e^{2x})^{(10)}&=C_{10}^0\cdot(x^3+4x^2+2)^{(0)}\cdot(e^{2x})^{(10)}+\\&+C_{10}^1\cdot(x^3+4x^2+2)^{(1)}\cdot(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2\cdot(x^3+4x^2+2)^{(2)}\cdot(e^{2x})^{(8)}+\\&+C_{10}^3\cdot(x^3+4x^2+2)^{(3)}\cdot(e^{2x})^{(7)}=2^{10}\cdot e^{2x}\cdot(x^3+4x^2+2)+\\&+2^9\cdot 10\cdot(3x^2+8x)e^{2x}+2^8\cdot 45\cdot(6x+8)e^{2x}+2^7\cdot 120\cdot 6\cdot e^{2x}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что все производные порядка выше третьего функции $f(x)=x^3+4x^2+2$ равны нулю. □

Для определения дифференциала второго порядка зафиксируем произвольное приращение аргумента dx. Тогда дифференциал df функции $f(x)$ будет являться функцией только от переменной x. Найдём дифференциал $d(df)$ этой функции для того же приращения аргумента dx. Получившееся выражение называется ***дифференциалом второго порядка*** функции $f(x)$ и обозначается d^2f. Аналогичным образом индуктивно определяются дифференциалы более высоких порядков: $d^nf=d(d^{n-1}f)$.

Если x — независимая переменная, то $d(dx)=0$ и

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)\,dx)=d(f'(x))\,dx=f''(x)\,(dx)^2,\quad d^3f=f'''(x)\,(dx)^3,\quad\ldots$$

Скобки у приращения аргумента опускают и пишут $d^nf=f^{(n)}(x)\,dx^n$.

Если x является функцией аргумента t, то для дифференциала второго порядка функции $f(x)$ справедливо следующее равенство:

$$d^2 f = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\,d\,(dx) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Отсюда получаем, что дифференциал второго порядка (а также дифференциалы более высоких порядков), в отличие от дифференциала первого порядка, в общем случае не обладает свойством инвариантности. Отметим, что если $x(t)$ — линейная функция, то инвариантность формы $d^2 f$ сохраняется, так как в этом случае $d^2x = 0$.

Задача 5.156. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, причём $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Докажем по индукции, что

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $P_n(t)$ — некоторый многочлен степени не выше $3n$ ($\deg P_n \leqslant 3n$).

В самом деле, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} te^{-t^2} = 0$ (см. задачу 4.158). Таким образом, база индукции установлена. Пусть, далее, формула (1) справедлива при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $x \neq 0$

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_{n+1}(t) = 2t^3P_n(t) - t^2P_n'(t)$. По предположению индукции $\deg P_n \leqslant 3n$, поэтому $\deg P_{n+1} \leqslant 3n+3$. Если же $x = 0$, то

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} tP_n(t)e^{-t^2} = 0.$$

Следовательно, равенство (1) верно при всех $n \in \mathbb{N}$. □

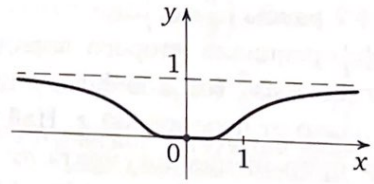


График функции $f(x)$ из рассмотренного примера см. выше.

5.1.4. Дифференцирование параметрически заданной, обратной и неявной функций

Если функция $y(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, причём существует $y'(x_0) \neq 0$, то на образе этой окрестности

Задачи

◇ **5.1.** Доказать, что функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ представима в виде $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$, где g — функция, непрерывная в точке x_0.

5.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке. Доказать, что функция $f(x) \cdot g(x)$ не является дифференцируемой в точке x_0.

✓**5.3.** Имеют ли производные в точке $x = 0$ следующие функции:
а) $y = x|x|$; б) $y = |x^3|$; в) $y = x|x^3|$?

5.4. Привести пример двух недифференцируемых в точке x_0 функций:
а) сумма которых дифференцируема в точке x_0;
б) произведение которых дифференцируемо в точке x_0;
в) частное которых дифференцируемо в точке x_0.

✓**5.5.** Пусть в некоторой точке x существует $f'(x)$. Обязательно ли существует $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$?

✓**5.6.** Следует ли дифференцируемость функции f в точке x из существования конечного предела: а) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$; б) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$?

✓**5.7.** Привести пример функции, дифференцируемой в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ и разрывной в остальных точках отрезка $[-2; 2]$.

5.8. Привести пример функции, дифференцируемой ровно а) в одной точке; б) в n точках; в) в счётном множестве точек.

Используя определение, найти производную функции f в заданной точке x_0 (5.9—5.12).

✓**5.9°.** $f(x) = x(x+1)^2(x-1)^3$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = -1$.

5.10. $f(x) = x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \dfrac{5\pi}{6}$.

5.11. $f(x) = (x-2)^2 \ln x$, а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$.

✓**5.12.** $f(x) = 3x + (x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, $x_0 = 1$.

✓**5.13.** Найти $f'(0)$, если а) $f(x) = |x|(1-\cos x)$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin\dfrac{5}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{4}{3x} + \dfrac{x}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Используя определение, найти производную функции (5.14—5.22).

◇**5.14°.** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. **5.15°.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$. ✓**5.16.** $f(x) = \sqrt{x}$.

✓**5.17.** $f(x) = \sin x$. **5.18.** $f(x) = \cos x$. **5.19.** $f(x) = \operatorname{tg} x$.

5.20. $f(x) = \arcsin x$. **5.21.** $f(x) = \arccos x$. ✓**5.22.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

✓**5.23.** Пусть $f(x)$ — дифференцируемая чётная (нечётная) функция. Доказать, что $f'(x)$ — нечётная (чётная) функция.

5.24. Доказать, что если чётная функция f дифференцируема в нуле, то $f'(0) = 0$.

✓**5.25.** Доказать, что производная периодической дифференцируемой функции является периодической функцией.

5.26. Доказать, что функция $f(x) = \sin x + \cos\sqrt{2}x$ не периодическая.

5.27. Привести пример монотонной функции, производная которой не является монотонной функцией.

Найти производную функции, заданной следующей формулой (5.28–5.98).

✓ **5.28°** $\dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{x^3}$. **5.29°** $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}}$. ◇ **5.30.** $\dfrac{4x^2-2x+10}{\sqrt{x}}$.

✓ **5.31°** $(3x-5)^6$. **5.32°** $\sqrt[4]{(8x-3)^3}$. **5.33°** $\sqrt[8]{(1-2x)^3}$.

✓ **5.34°** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}$. ✓ **5.35.** $x^2\sqrt[3]{x^2+4x+1}$. **5.36°** $\dfrac{x}{(x^3+2)^3}$.

✓ **5.37°** $\dfrac{x^3}{(1-x^4)^2}$. ✓ **5.38.** $\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **5.39.** $\dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$.

5.40° $\dfrac{1}{\sin^3 2x}$. **5.41°** $\sin 3x\cdot\cos^2 3x$. ✓ **5.42.** $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

◇ **5.43.** $x(\cos x-4\sin x)$. **5.44.** $\dfrac{\sin 2x+1}{\sin x-\cos x}$. **5.45.** $\dfrac{x^2}{(x+\sin x)^3}$.

5.46. $e^{3x}(x+3)$. **5.47.** $e^{-x}\dfrac{x-2}{(1-x)^2}$. **5.48.** $e^{-x}(\cos x+\sin x)$.

✓ **5.49.** $e^{2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$. ◇ **5.50.** $\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}$.

5.51. $x^2 2^x+x^3 3^x$. **5.52.** $x\cdot 2^{1-x^2}$. **5.53.** $x^2\sqrt{5^{-x}+3}$.

✓ **5.54.** $3^{\sin^2\frac{x}{2}}$. **5.55.** $4^{x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **5.56.** $2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg}5x+1}}$.

✓ **5.57.** $x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. ✓ **5.58.** $x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

5.59. $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$. ✓ **5.60.** $\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}2x$.

5.61. $\ln\operatorname{ctg}\dfrac{2x+\pi}{4}$. **5.62.** $x\operatorname{ctg}x-\ln\sin x$.

5.63. $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\ln\operatorname{ctg}^2 x$. **5.64.** $x+\ln(\cos x+\sin x)$.

5.65. $\log_2\dfrac{\cos x+x\sin x}{\sin x-x\cos x}$. ✓ **5.66.** $x(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x))$.

5.67. $2\cos x\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{\cos 2x}\right)$.

5.68. $3^{\ln^2(1+e^{-x})}$. ◇ **5.69.** $\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$. ✓ **5.70.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$.

5.71. $x^2\arccos 3x$. **5.72.** $x^2\operatorname{arctg}x$. **5.73.** $2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}$.

✓ **5.74.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. ✓ **5.75.** $\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$.

✓ **5.76.** $\arcsin\dfrac{x+2}{2x+2}$. ✓ **5.77.** $\arccos\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$. **5.78.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$.

5.79. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}-\arcsin 2x$. **5.80.** $x\arcsin\sqrt{1-2x^3}$.

✓ **5.81.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$. ◇ **5.82.** $\ln^3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$. **5.83.** $\operatorname{arcctg}(\cos^2 x)$.

◇ **5.84.** x^x. ✓ **5.85.** $(1+x)^{\frac{1}{x}}$. ✓ **5.86.** $(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}$.

5.87. $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}$. **5.88.** $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$. **5.89.** $\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}$.

◇ **5.90.** $(\operatorname{arctg}x)^x$. **5.91.** $(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

◇ **5.92.** $\dfrac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3}$. **5.93.** $\dfrac{x^3}{x+1}\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{(x+2)^3}}$. ✓ **5.94.** $\dfrac{x^x\sqrt[7]{(2x-1)^2}}{(x+3)^4(x-5)^3}$.

✓ **5.95.** $\arcsin(\sin x)$. **5.96.** $\operatorname{arctg}\dfrac{x+4}{x-4}$. ✓ **5.97.** $\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

◇ **5.98.** $x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$, $|x|<\sqrt{\pi}$.

Найти производную функции f, заданной кусочно (5.99—5.101).

5.99. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ ◊**5.100.** $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5.101. $f(x)=\begin{cases}(x+1)\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x+1}+2x, & x\neq -1,\\ -2, & x=-1.\end{cases}$

Для данной функции f найти $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ (5.102—5.110).

◊**5.102.** $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$. ◊**5.103.** $f(x)=x\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

√**5.104.** $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. **5.105.** $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

5.106. $f(x)=\arcsin e^{-x^2}$. **5.107.** $f(x)=x|\sin x|$.

◊**5.108.** $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **5.109.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2^{1/x}-1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5.110. $f(x)=\begin{cases}x\arcsin\left(\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

◊**5.111.** Исследовать на дифференцируемость функцию f и найти её производную, если а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\geqslant 0,\\ x^2+x, & x<0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5.112. Исследовать на дифференцируемость функцию f, если

$$f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{3}{2^{n+1}} & \text{при } x\in[2^{-n};\,2^{1-n})\cap\mathbb{Q},\\ \sin\left(x-\dfrac{3}{2^{n+1}}\right) & \text{при } x\in[2^{-n};\,2^{1-n})\setminus\mathbb{Q},\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

√**5.113.** Привести пример такой непрерывной на $[-1;\,1]$ функции $f(x)$, что для всех $x\in(-1;\,1)$ производная $f'(x)$ существует, но $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)$ не существуют.

√**5.114.** Привести пример функции, непрерывной в нуле, но не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.

√**5.115.** Доказать, что существование односторонних производных $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ влечёт непрерывность функции f в точке x.

5.116. Пусть функция $f\colon (a;\,b)\to\mathbb{R}$ достигает своего наибольшего значения в точке $c\in(a;\,b)$ и существуют односторонние производные $f'_-(c)$ и $f'_+(c)$. Доказать, что $f'_-(c)\geqslant 0$ и $f'_+(c)\leqslant 0$.

◊**5.117.** Исследовать функцию $f(x)=|x|$ на дифференцируемость: а) в точке $x=0$; б) на отрезке $[0;\,1]$.

◊**5.118.** Пусть $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\geqslant a,\\ g(x), & x<a.\end{cases}$ Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции f и g, чтобы функция φ была дифференцируемой на всей числовой прямой?

◊**5.119.** Найти такие числа a, b, чтобы функция

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ x^2+ax+b, & x>0.\end{cases}$$

была дифференцируема на $\mathbb{R}$.

5.133. Пусть функция f дифференцируема в точке a. Найти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\sum\limits_{j=1}^{k} f\Big(a+\dfrac{j}{n}\Big)-kf(a)\Big)$, $k\in\mathbb{N}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} f\Big(a+\dfrac{k}{n^2}\Big)-nf(a)\Big)$.

5.134*. Пусть многочлен P степени n имеет n различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а степень многочлена Q не выше $n-1$. Доказать, что
$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$$
при $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_n\}$, и найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{P'(x_k)}$ при $n\geqslant 2$.

5.135. Доказать, что при $x\in\mathbb{R}\setminus\{-n,-(n-1),\ldots,-1,0\}$ справедливо равенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^kC_n^k}{x+k}=\dfrac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

5.136. Пусть f дважды дифференцируема на $(0;+\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f''(x))$. Следует ли отсюда существование $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$?

√**5.137.** Пусть функции f и g таковы, что $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0)$ при $x\in U(x_0)$ и $g\in C^{(n-1)}(U(x_0))$. Доказать существование и найти $f^{(n)}(x_0)$.

◊**5.138.** Показать, что $(\sin x)^{(n)}=\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{2}n\Big)$.

◊**5.139.** Найти $f^{(10)}(x)$, если $f(x)=(x^3+4x^2+2)e^{2x}$.

Найти производную n-го порядка функции, заданной следующей формулой (5.140–5.154).

5.140°. e^{2x}. **5.141.** $x\sin x$. **5.142°.** $\cos^2 x$.

√**5.143.** $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$. **5.144.** $\dfrac{1+2x}{3x-1}$. √**5.145.** $(x^2+x+1)e^{-3x}$.

5.146. $x^2\ln\dfrac{1}{1+x}$. √**5.147.** $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-2x}}$. **5.148.** $\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$.

√**5.149.** $\cos^4 x$. **5.150.** $\sin x\cdot\cos^2 2x$. **5.151.** $x^2\sin^2 x$.

√**5.152.** $e^{-x}\cos x$. **5.153.** $e^{3x}\sin 4x$. **5.154.** $e^x\cos^2 x$.

5.155. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Доказать равенства:

√а) $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\Big(x+\dfrac{\pi n}{4}\Big)$;

б) $(x^n\ln x)^{(n)}=n!\Big(\ln x+1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\Big)$, $x>0$;

в) $\Big(\dfrac{\ln x}{x}\Big)^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-n-1}\Big(\ln x-1-\dfrac{1}{2}-\ldots-\dfrac{1}{n}\Big)$, $x>0$;

г) $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$, $x\neq 0$.

◊**5.156.** Пусть
$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$
Доказать, что $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, причём $f^{(n)}(0)=0$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

5.157. Доказать, что функция $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, если

√а) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}} & \text{при } x\in(a;b),\\ 0 & \text{при } x\notin(a;b).\end{cases}$

5.5. Да, и равен $2f'(x)$. 5.6. П

5.7. Например, $f(x) = x^2(x^2-1)^2$

5.8. а) $x^2D(x)$; б) $(x-1)^2\cdot\ldots\cdot(x$

5.9. а) -1; б) 0; в) 0. **5.10.** а) $\frac{1}{2}$

5.13. а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{2}$. **5.14.** nx^{n-}

5.18. $-\sin x$. **5.19.** $-\frac{1}{\sin^2 x}$. **5.2**

5.26. *Указание*. Если предполож
функция $f''(x)$ будет иметь такой
комбинация этих функций будет
есть функции $\sin x$ и $\cos\sqrt{2}x$, кото

5.39. $\dfrac{6-5x-7x^2+3(3x-2)(1+x)^{2/3}}{6x^2(1-x)^{3/2}(1+x)^{2/3}}$. **5.40.** $\dfrac{-6\cos 2x}{\sin^4 2x}$. **5.41.** $\dfrac{3}{2}\cos 3x(3\cos 6x-1)$.

5.42. $\dfrac{2-\cos 2x}{\cos^4 x}$. **5.43.** $(1-4x)\cos x-(4+x)\sin x$. **5.44.** $\dfrac{(\cos x+\sin x)(\sin 2x-3)}{1-\sin 2x}$.

5.45. $\dfrac{2x\sin x-3x^2\cos x-x^2}{(x+\sin x)^4}$. **5.46.** $e^{3x}(3x+10)$. **5.47.** $e^{-x}\dfrac{x^2-2x-1}{(1-x)^3}$.

5.48. $-2e^{-x}\sin x$. **5.49.** $-13e^{2x}\sin 3x$. **5.50.** $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}}$.

5.51. $x^2(2^x\ln 2+x3^x\ln 3)+x(2^{x+1}+x3^{x+1})$. **5.52.** $2^{1-x^2}(1-x^2\ln 4)$.

5.53. $\dfrac{12x+x5^{-x}(4-x\ln 5)}{2\sqrt{5^{-x}+3}}$. **5.54.** $\dfrac{\ln 3}{2}\sin x\cdot 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$.

5.55. $4^{x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\ln 4\cdot\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$. **5.56.** $2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg}5x+1}}\cdot\dfrac{\ln 2}{(\operatorname{tg}5x+1)^{4/5}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 5x}$.

5.57. $a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a$. **5.58.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5.59. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **5.60.** $\dfrac{2}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}$. **5.61.** $-\dfrac{1}{\cos x}$. **5.62.** $-\dfrac{x}{\sin^2 x}$.

5.63. $\dfrac{2}{\sin x\cdot\cos^3 x}$. **5.64.** $\dfrac{2\cos x}{\sin x+\cos x}$. **5.65.** $\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{-2x^2}{(1-x^2)\sin 2x-2x\cos 2x}$.

5.66. $5\cos(2\ln x)$. **5.67.** $-4\sin x\sqrt{\cos 2x}$. **5.68.** $-3^{\ln^2(1+e^{-x})}\cdot\dfrac{2\ln 3\ln(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}e^{-x}$.

5.69. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+2x\arcsin x}{(1-x^2)^2}$. **5.70.** $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}\cdot\ln\frac{1}{3}\cdot 2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **5.71.** $2x\arccos 3x-\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$.

5.72. $2x\operatorname{arctg}x+\dfrac{x^2}{1+x^2}$. **5.73.** $2^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}\ln 2\cdot\dfrac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **5.74.** $\arccos x$.

5.75. $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$. **5.76.** $-\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$. **5.77.** $\dfrac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$. **5.78.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$.

5.79. $\dfrac{8x^2}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$. **5.80.** $\arcsin\sqrt{1-2x^3}-\dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2-4x^3}}$. **5.81.** $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\cos^2 x}$.

5.82. $-\dfrac{9\ln^2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}$. **5.83.** $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}$. **5.84.** $x^x(\ln x+1)$.

5.85. $(1+x)^{\frac{1-x}{x}}\cdot\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}$.

5.86. $(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}\left(-2\sin 2x\cdot\ln(e^x+e^{-x})+\cos 2x\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$.

5.87. $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}\left(\dfrac{1}{3}(e^x-e^{-x})^{-2/3}(e^x+e^{-x})\ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{2x}{3}}\cdot\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}\right)$.

5.88. $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}\left(\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ln\arcsin x+\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

5.89. $\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}\left(\arcsin 2x\cdot\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x\arcsin 2x}{\sin x}\right)$.

5.90. $(\operatorname{arctg}x)^x\left(\ln\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}\right)$.

5.91. $(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left(\dfrac{2}{3}x(1+x^2)^{-2/3}\cdot\ln\operatorname{arctg}4x+\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\operatorname{arctg}4x}\cdot\dfrac{4}{1+16x^2}\right)$.

5.92. $\dfrac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3}\left(\dfrac{5}{7(x+3)}-\dfrac{6}{x-2}-\dfrac{6}{2x+9}\right)$.

5.93. $\dfrac{x^3}{x+1}\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{(x+2)^3}}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{5(x-1)}-\dfrac{3}{5(x+2)}\right)$.

5.94. $\dfrac{x^x \sqrt[7]{(2x-1)^2}}{(x+3)^4(x-5)^3}\left(1+\ln x+\dfrac{4}{7(2x-1)}-\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{3}{x-5}\right)$.

5.95. $\operatorname{sgn}\cos x,\ x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **5.96.** $-\dfrac{4}{x^2+16},\ x\neq 4$.

5.97. $\dfrac{2x}{x^4-2x^2+1},\ x\neq\pm1$. **5.98.** $\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}+x\cdot\dfrac{2x\cos x^2\cdot(1-x)^2-2(1-x)\sin x^2}{2\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}}$ при $x\in(-\sqrt{\pi};\sqrt{\pi})\setminus\{0,1\}$, 0 при $x=0$, не дифференцируема при $x=1$.

5.99. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+1,\ x\neq0,\ f'(0)=1$. **5.100.** $2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ при $x\neq0$, $f'(0)=0$.

5.101. $\dfrac{-2(x+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x+1}+2,\ x\neq-1;\ f'(-1)=\dfrac{\pi^2}{4}+2$.

5.102. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ при $x\neq0$, $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$.

5.103. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}$ при $x\neq0$, $f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)=0$. **5.104.** $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\dfrac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2},\ x\neq0,\ f'_+(0)=2,\ f'_-(0)=-2$.

5.105. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\neq0,\ f'_+(0)=1,\ f'_-(0)=-1$.

5.106. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\dfrac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}},\ x\neq0,\ f'_+(0)=-\sqrt{2},\ f'_-(0)=\sqrt{2}$.

5.107. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=|\sin x|+x\cos x\operatorname{sgn}\sin x,\ x\neq\pi k$,
$$f'_+(0)=f'_-(0)=0,\ f'_+(\pi k)=\pi k\operatorname{sgn}k,\ f'_-(\pi k)=-\pi k\operatorname{sgn}k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

5.108. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\sin\dfrac{1}{x}-x\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ при $x\neq0$, $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ не существуют.

5.109. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\dfrac{2^{1/x}\left(1+\dfrac{\ln2}{x}\right)-1}{(2^{1/x}-1)^2},\ x\neq0,\ f'_+(0)=0,\ f'_-(0)=-1$.

5.110. $f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\dfrac{1}{x}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)+\arcsin\cos\dfrac{1}{x},\ x\neq\dfrac{1}{\pi k},\ x\neq0$, $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ не существуют,
$$f'_-\left(\frac{1}{\pi k}\right)=(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ f'_+\left(\frac{1}{\pi k}\right)=(-1)^{k+1}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right).$$

5.111. а) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\geqslant0,\\ 2x+1, & x<0;\end{cases}$ б) $f'(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$ при $x\neq0$, не дифференцируема при $x=0$.

5.112. Дифференцируема при $x=\dfrac{3}{2^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$, и разрывна в остальных точках.

5.113. Например, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5.114. Например, $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ или $f(x)=xD(x)$.

5.117. а) не дифференцируема; б) дифференцируема. **5.118.** f и g дифференцируемы при $x>a$ и при $x<a$ соответственно, $f(a)=g(a-0)$, $f'_+(a)=g'_-(a-0)$.

5.119. $a=1$, $b=1$.

5.120. а) $a_1=-1,\ b_1=\dfrac{\pi}{2},\ a_2=1,\ b_2=\dfrac{\pi}{2}$; б) $a_1=-\dfrac{\pi}{2},\ b_1=\dfrac{\pi}{2},\ a_2=\pi,\ b_2=\pi$;

в) $a_1=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4},\ b_1=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{4},\ a_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{4},\ b_2=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{4}$;

г) $a_1=-\dfrac{1}{2},\ b_1=-\dfrac{1}{2e^2},\ a_2=3e,\ b_2=-2e^2$.

5.121. а) 1) x, 2) $-\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{6}{5}x$;

б) 1) $\frac{e^{-2}-e^2}{2}x+\frac{e^2+e^{-2}}{2}$, 2) $\left(\frac{-3}{4}e^2-\frac{e^{-2}}{4}\right)x^3+e^2x^2+\left(\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}e^2\right)x+\left(\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^2}{2}\right)$.

5.122. Например, $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, см. задачу 5.100.

5.123. *Указание.* Обозначим $g(x)=x(x-1)^2\sin\frac{\pi}{(x-1)^2}$, $\varphi_n(x)=g\left(\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right)$. Положим $\varphi(x)=(1-x)^2$, $x\in[1;2]$; $\varphi(x)=\varphi_n(x)$, $x\in\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(x)=\varphi_n(-x)$ при $x\in\left(-\frac{1}{n};-\frac{1}{n+1}\right]$; $\varphi(x)=(x+1)^2$, $x\in(-2;1]$. Тогда функция $f(x)=x^2\varphi(x)$ на интервале $(-2;2)$ удовлетворяет поставленным условиям.

5.124. Например, $f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}$. **5.125.** Например, $f(x)=\cos(\ln x)$.

5.126. Например, $f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$. **5.127.** Например, $f(x)=\sqrt{x}$.

5.128. а) $p>0$; б) $p>1$; в) $p>q+1$. **5.129.** $1+\frac{f(0)}{f'(0)}$. **5.130.** $f'(a)g(a)-f(a)g'(a)$.

5.131. $f'(0)H_n$, где $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. **5.132.** а) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$; б) $e^{a\frac{f'(a)}{f(a)}}$. **5.133.** а) $\frac{k(k+1)}{2}f'(a)$;

б) $\frac{1}{2}f'(a)$. **5.134.** 0. **5.135.** *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.

5.136. Нет, например, $f(x)=\cos x$. **5.137.** $f^{(n)}(x_0)=ng^{(n-1)}(x_0)$.

5.139. $2^{10}\cdot e^{2x}\cdot(x^3+4x^2+2)+2^9\cdot 10\cdot(3x^2+8x)e^{2x}+2^8\cdot 45\cdot(6x+8)e^{2x}+2^7\cdot 720\cdot e^{2x}$.

5.140. 2^ne^{2x}. **5.141.** $x\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-n\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **5.142.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

5.143. $(-1)^nn!\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$.

5.144. $\frac{(-1)^n\cdot 5\cdot 3^{n-1}\cdot n!}{(3x-1)^{n+1}}$. **5.145.** $(-1)^{n-2}3^{n-2}e^{-3x}(9x^2+x(9-6n)+n^2-4n+9)$.

5.146. $y'=-2x\ln(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$, $y''=-2\ln(1+x)-\frac{4x+3x^2}{(1+x)^2}$,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-3)!}{(x+1)^n}(2x^2+2xn+n^2-n),\ n\geqslant 3.$$

5.147. $\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-3)!!}{(1-2x)^{n-\frac{1}{2}}}+\frac{3(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\right)=\frac{(2n-3)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}(3n-1-x)$.

5.148. $\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-5)(x-1)^{2/3-n}-\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(x-1)^{-1/3-n}$, $n\geqslant 2$.

5.149. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

5.150. $\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{5^n}{4}\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

5.151. $y'=x-x\cos 2x+x^2\sin 2x$, $\quad y''=1-\cos 2x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x$, а при $n\geqslant 3$

$$y^{(n)}=-2^{n-3}\left(4x^2\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4nx\cos\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+(n^2-n)\cos\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right).$$

5.152. $(\sqrt{2})^ne^{-x}\cos\left(x+\frac{3\pi n}{4}\right)$. **5.153.** $5^ne^{3x}\sin(4x+n\varphi)$, $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

5.154. $\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}5^{n/2}\cos\left(2x+n\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

5.156. *Указание.* Доказать по индукции, что $f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$, $f^{(n)}(0)=0$, где $P_n(t)$ — некоторый многочлен степени не выше $3n$.

5.158. *Указание.* Применить формулу Лейбница к равенству $(f(x))^2=x^2-1$.

5.159. *Указание.* Применить формулу Лейбница к равенству $f'(x)=f(x)(\ln|f(x)|)'$.

5.160. $x'(y)=\frac{1}{3(1+x^2(y))}$. **5.161.** $x'(y)=\frac{1+x^2(y)}{2+x^2(y)}$. **5.162.** $x'(y)=\frac{x(y)}{1+x(y)}$.