

- \checkmark 4.290. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$. \diamond 4.291. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.
 4.292. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$. 4.293*. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$.
 \checkmark 4.294. Пусть $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x) = 1$. Доказать, что
 а) если $\lim_{x \rightarrow \omega} v(x)(u(x) - 1) = l$, то $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x)^{v(x)} = e^l$;
 б) если $\lim_{x \rightarrow \omega} v(x)(u(x) - 1) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x)^{v(x)} = +\infty$;
 в) если $\lim_{x \rightarrow \omega} v(x)(u(x) - 1) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x)^{v(x)} = 0$.
 Раскрыть неопределённость вида 1^∞ (4.295—4.311).
 \diamond 4.295 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. \checkmark 4.296 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.
 4.297 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. 4.298. $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
 4.299 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}$. 4.300 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^2)^{\sin^{-2} x}$.
 4.301 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. \checkmark 4.302. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{-x})^{\operatorname{ctg} x}$.
 4.303. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$. 4.304. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{x^2-1}}$.
 \checkmark 4.305. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$. 4.306. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{ctg} \pi x}$.
 \diamond 4.307. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ($a, b > 0$). 4.308. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n^2}$ ($a, b > 0$).
 4.309. $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$. 4.310. $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

\checkmark 4.311. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ ($\alpha_i > 0$).

4.312. Доказать равенства при $x \rightarrow 0$:

- а) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$; \checkmark б) $c \cdot o(x) = o(x)$, если c — постоянная;
 \diamond в) $o(x^2) + o(x) = o(x)$; г) $o(x^2 + o(x^2)) = o(x^2)$;
 \checkmark д) $o(x) + x^2 = o(x)$; \checkmark е) $(x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$;
 ж) $(x + o(x))\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$;

з) $\sqrt{x^2 + o(x^2)} = |x| + o(x)$; и) $e^{x+o(x)} = 1 + x + o(x)$.

\checkmark 4.313. Верно ли, что при $x \rightarrow 0$ справедливы равенства:

- а) $o(1) + o(1) = o(1)$; б) $o(1) - o(1) = 0$;
 в) $O(x^3) = o(x^3)$; г) $e^{O(1)} = O(1)$;
 д) $(x + x^2 + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^2)$; е) $(x + x^2 + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3)$?

\checkmark 4.314. Пусть $m < n$ и $x \rightarrow 0$. Доказать, что

а) $x^n = o(x^m)$; б) $O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$; в) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

\checkmark 4.315. Пусть $\alpha < \beta$ и $x \rightarrow +\infty$. Доказать, что

а) $x^\alpha = o(x^\beta)$; б) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta)$; в) $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\beta)$.

В задачах (4.316—4.330) все функции определены в некоторой проколлотой окрестности точки ω и все соотношения понимаются при $x \rightarrow \omega$.

\checkmark 4.316 $^\circ$. Пусть $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = l \neq 0$. Доказать, что $f(x) \sim l$.

4.317 $^\circ$. Пусть $f(x) \sim g(x)$. Доказать, что $f(x) = O(g(x))$

- 4.318° Доказать, что $o(f(x)) = O(f(x))$.
- ✓ 4.319° Пусть $f(x) \sim g(x)$. Доказать, что $o(f(x)) = o(g(x))$.
- ◇ 4.320° Доказать, что $f(x) \sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + o(g(x))$.
- ✓ 4.321° Доказать, что $o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x))$.
- ✓ 4.322° Если $C \neq 0$, то $O(Cf(x)) = O(f(x))$, $o(Cf(x)) = o(f(x))$.
- 4.323. Доказать равенства:
 а) $O(O(f(x))) = O(f(x))$, б) $o(O(f(x))) = o(f(x))$, в) $o(o(f(x))) = o(f(x))$.
- ✓ 4.324. Доказать равенства:
 а) $f(x) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$, б) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$.
- 4.325. Доказать равенства: а) $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x))$,
 б) $O(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$, в) $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$.
- ✓ 4.326. Доказать равенства: а) $O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$,
 б) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$, в) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.
- 4.327° Доказать, что отношение $f(x) \sim g(x)$ является отношением эквивалентности, т. е. а) $f(x) \sim f(x)$ (рефлексивность);
 б) если $f(x) \sim g(x)$, то $g(x) \sim f(x)$ (симметричность);
 в) если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) \sim h(x)$ (транзитивность).
- ✓ 4.328. Пусть $f(x) \sim g(x)$ и $h(x) \sim k(x)$. Верно ли, что:
 а) $f(x) + h(x) \sim g(x) + k(x)$; б) $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$?
- ✓ 4.329. Пусть $f(x) \sim g(x)$. Верно ли, что $a^{f(x)} \sim a^{g(x)}$ ($a > 0$)?
- ✓ 4.330. Пусть $f(x) \sim g(x)$, $f(x), g(x) > 0$, $h(x)$ — некоторая функция.
 а) Верно ли, что $(f(x))^{h(x)} \sim (g(x))^{h(x)}$?
 б) Верно ли утверждение п. а) при условии $-C \leq h(x) \leq C$, $C > 0$?
- ✓ 4.331. Показать, что при $x \rightarrow 0$
 а) $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(x)$ и $x = O\left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$; б) $x \cos \frac{1}{x} = O(x)$, но $x \neq O\left(x \cos \frac{1}{x}\right)$.
- 4.332. Показать, что при $x \rightarrow \infty$
 а) $\sqrt{x^2 + 4} \operatorname{arctg} x = O(x)$ и $x = O(\sqrt{x^2 + 4} \operatorname{arctg} x)$;
 б) $\ln(x^2 + 2^x) = O(x)$, но $x \neq O(\ln(x^2 + 2^x))$.
- Найти главную часть вида Cx^α функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (4.333–4.342).
- ◇ 4.333° $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$, $\alpha_0 \neq 0$.
- ✓ 4.334° $f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$, $a_0 b_0 \neq 0$.
- ✓ 4.335° $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.
- ✓ 4.336. $f(x) = (x - \sqrt{x^2 - 1})^\alpha + (x + \sqrt{x^2 - 1})^\alpha$ ($\alpha > 0$).
- ✓ 4.337. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$; 4.338. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(-x)$;
- ✓ 4.339. $f(x) = \ln(x^2 + 4 + 4^{x^2})$; 4.340. $f(x) = (x^2 + 2) \ln(x + 2) - x^2 \ln x$;
- 4.341. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$; 4.342. $f(x) = \arcsin \frac{4x+1}{x^2+10x}$.
- Найти главную часть вида Cx^α функции $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ (4.343–4.354).
- 4.343° $f(x) = (1 + mx)^n - (1 + nx)^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) \neq (1, 1)$.
- ◇ 4.344° $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-m} x^m$, $\alpha_{n-m} \neq 0$.
- ✓ 4.345° $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ($x \rightarrow 0+$).

- 4.346. $f(x) = \sqrt{1-2x-4x^2} + x - 1$. 4.347. $f(x) = \sqrt[n]{1+ax} \cdot \sqrt{1+bx} - 1$.
- ◇ 4.348. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}} \cdot \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ($x \rightarrow 0+$).
- ✓ 4.349. $f(x) = \ln \cos \pi x$. 4.350. $f(x) = a^x - b^x$, $a \neq b$.
- 4.351. $f(x) = 1 + \sin ax - \cos ax$. 4.352. $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 1$.
- ✓ 4.353. $f(x) = \ln(x^2 + 4^x)$. ✓ 4.354. $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.
- Найти главную часть вида $C(x-1)^\alpha$ функции $f(x)$ при $x \rightarrow 1$ (4.355–4.364).
- ✓ 4.355^o. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 3$. 4.356^o. $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n - n$.
- 4.357. $f(x) = (x^6 - 2x^2 + 1) \operatorname{tg} \pi x$. ◇ 4.358. $f(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1$.
- 4.359. $f(x) = 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x$. ✓ 4.360. $f(x) = x^x - 1$.
- 4.361. $f(x) = \ln \sin \frac{\pi x}{2}$. 4.362. $f(x) = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{-1}$.
- 4.363. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. 4.364. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^a - x^b}}{\operatorname{arctg} x - \pi/4}$ ($a \neq b$).
- ✓ 4.365. Найти главную часть вида $C(1-x)^\alpha$ функции $f(x) = \arccos x$ при $x \rightarrow 1-$.

Найти главные части вида $\frac{C}{n^\alpha}$ последовательности (a_n) (4.366–4.375).

- ✓ 4.366. $a_n = \sqrt[4]{n^4 + an + b} - n$. 4.367. $a_n = \ln \frac{n+1}{n+5} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$.
- ◇ 4.368. $a_n = |\sin(\pi\sqrt{n^2+k})|$, $k \neq 0$.
- 4.369. $a_n = a^{1/n} - \frac{1}{2}(b^{1/n} + c^{1/n})$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a^2 \neq bc$.
- 4.370. $a_n = \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - 1$. 4.371. $a_n = \sin \frac{\pi n}{2n+1} - 1$.
- ✓ 4.372. $a_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$. 4.373. $a_n = \sqrt[n]{2} - n^{1/\sqrt{2}}$.
- 4.374. $a_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. 4.375. $a_n = \ln(1+3^n)$.
- ✓ 4.376. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x-x^2)}{x^2}$. Можно ли для этого воспользоваться соотношениями $\ln(1+x) \sim x$ и $\ln(1-x-x^2) \sim -x-x^2$ при $x \rightarrow 0$?
- ◇ 4.377. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x - \sin^2 2x}{x^4}$. Можно ли для этого воспользоваться соотношениями $2 - 2 \cos 2x \sim 4x^2$ и $\sin^2 2x \sim 4x^2$ при $x \rightarrow 0$?
- ✓ 4.378. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{2x^2 + x}$. Можно ли для этого воспользоваться соотношением $x^2 + x \sim x^2$ при $x \rightarrow +\infty$?

Найти предел функции, используя табличные эквивалентности или соотношения с о-малым (4.379–4.442).

- ✓ 4.379. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha x - \sin^2 \beta x}{\operatorname{arctg}^2 x + x^3}$. 4.380. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$.
- 4.381. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$. 4.382. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}{\operatorname{arctg} x}$.
- ✓ 4.383. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\sqrt{1+2x} - 1}$. 4.384. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx - n}{\sin x^2}$.
- 4.385. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(1 + xe^x)}$. 4.386. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - x)}{\ln(x^4 + x^2 - x)}$.
- ✓ 4.387. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 16}{\ln(x^2 - x - 1)}$. 4.388. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 81}{2x^3 - 256}$.

- 4.389. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{x - e}$. 4.390. $\lim_{x \rightarrow e^e} \frac{\ln \ln \ln x}{x - e^e}$. $\sqrt{4.391.} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$.
- 4.392. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x}$. 4.393. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[3]{1+5x} - \sqrt{1+6x}}{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[5]{1+2x}}$.
- 4.394. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{\sqrt[5]{x} - 1}$. 4.395. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 - 1})$.
- $\sqrt{4.396.} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[4]{4x^4 + 1}}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[4]{4x^4 + 1}}{x}$.
- 4.397. а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 2}}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 2}}{x}$.
- 4.398. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$.
- $\diamond 4.399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x) - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$. $\diamond 4.400. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt[5]{1 + x}}$.
- 4.401. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x - \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \ln(1 + 7x)}$. $\sqrt{4.402.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x - x^2) + \arcsin 5x - 3x^3}{\sin 3x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^{10}}$.
- 4.403. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + \cos \frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x} - 1}$. 4.404. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2 + \sqrt[3]{1 - x^2} - 1}$.
- $\sqrt{4.405.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \cos \pi x}{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{4x}}$. 4.406. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\ln \cos 2x} \quad (a > 0, b > 0)$.
- 4.407. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x + \cos \pi x}{\ln(x^2 - 2x + 2)}$. $\sqrt{4.408.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{\arcsin^3 x}$.
- 4.409. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{\cos \frac{\pi + x}{2}}$. 4.410*. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 2^x - 12}{2 \sin \frac{\pi}{3x} - 1}$.
- 4.411. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1 + \sin 3x} - 1 + \operatorname{tg} x}{\arcsin x}$. $\sqrt{4.412.} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x^3 + 2x}{1 + x^3}} \right)$.
- 4.413. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}}$. 4.414. $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(a^x - a)^2}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 2}}$.
- 4.415. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^\alpha}{\sin 2\pi x^\beta} \quad (\beta \neq 0)$. $\diamond 4.416. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x - \sqrt[7]{x})}$.
- 4.417. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}}$. 4.418. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$.
- 4.419. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$. $\sqrt{4.420.} \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{\sqrt[3]{bx^2} - b} \quad (a > 0, b \neq 0)$.
- 4.421. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[m]{\cos \beta x}}{\operatorname{arctg}^2 x}$. 4.422. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\sin 2x} - 1}{x^3}$.
- 4.423 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{2}{x} \right)^x$. 4.424 $^\circ$. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$.
- $\sqrt{4.425.} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x))^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$. $\diamond 4.426. \lim_{x \rightarrow 1} (\sin \pi x + x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.
- 4.427. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin^2 \pi x)^{\frac{1}{\ln x}}$. $\sqrt{4.428.} \lim_{x \rightarrow 1} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$.
- 4.429. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x+3} - 2}}$. 4.430. $\lim_{x \rightarrow 1-} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$.
- 4.431. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(2 - \frac{x}{\alpha} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{\alpha}} \quad (\alpha \neq 0)$. 4.432. $\lim_{x \rightarrow \beta} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \right)^{\frac{1}{x - \beta}} \quad (\alpha \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

$$4.433. \lim_{x \rightarrow 1} (\ln(e^x + x - 1))^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}.$$

$$4.434. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x^2 + e^{x+1}))^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.435. \lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(x + e^x))^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$4.436. \lim_{x \rightarrow 1} (\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\ln(x^2 - 2x + 2)}}.$$

$$\sqrt{4.437.} \lim_{x \rightarrow 1} (4^x - \sqrt{x+8})^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$4.438. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \cdot 2^x + 1}{x \cdot 3^x} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$4.439. \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x - \pi})^2}}.$$

$$\sqrt{4.440.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(10 + e^x)}{x} \right)^{\sqrt{e^{2x} + 10}}.$$

$$4.441. \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{th} x|^{\operatorname{sh} 2x}.$$

$$4.442. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}.$$

◇ 4.443*. Найти главную часть вида Cx^α функции $f(x) = \operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$.

$$4.444*. \text{Найти предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$4.445*. \text{Найти предел } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Найти предел последовательности (4.446–4.452).

$$4.446. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 1}.$$

$$4.447. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n}).$$

$$\sqrt{4.448.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n - 1}}{\ln(1+n) - \ln(2+n)}.$$

$$\sqrt{4.449.} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \right).$$

$$4.450. \lim_{n \rightarrow \infty} n \arccos \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

$$\sqrt{4.451.} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cos(\pi \sqrt{4n^2 + 10}).$$

$$4.452. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx \right)^{\operatorname{ctg}(\pi \sqrt{n^2 + 1})} \quad (x > 0).$$

Найти все наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ (4.453–4.460).

$$4.453. y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x.$$

$$\diamond 4.454. y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 7}.$$

$$\sqrt{4.455.} y = (2x + 3)e^{1/x}.$$

$$\sqrt{4.456.} y = \sqrt{x^4 + x^3} - x^2.$$

$$4.457. y = x \sin \frac{1}{x}.$$

$$4.458. y = x \cos \frac{1}{x}.$$

$$\sqrt{4.459.} y = \ln(1 + e^{2x}).$$

$$4.460. y = \frac{x^2 + \sin x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

4.461. Пусть $a_n \geq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Какое свойство функции $f: U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ описывается условием

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \delta_n > 0: \forall x \in U_{\delta_n}(x_0) \text{ имеем } |f(x) - f(x_0)| < a_n?$$

Каким свойством должна обладать последовательность (a_n) , чтобы из этого условия следовала непрерывность функции f в точке x_0 ?

√ 4.462. Равносильно ли условие

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall x \in U_\delta(a) \text{ имеем } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

непрерывности функции $f: U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 ? Какое свойство