

- 4.127. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\operatorname{ctg} x}{e^x}$. 4.128. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x$.
- ◇ 4.129. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}$. 4.130. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.
- ✓ 4.131. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 2^{-x}}$. 4.132. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| \operatorname{arctg} x + \ln(x^2 + 1))$.

Найти предел, пользуясь принципом двустороннего ограничения или теоремой о произведении ограниченной и бесконечно малой функций (4.133–4.141).

- ✓ 4.133° $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$. 4.134° $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.
- ◇ 4.135. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$. 4.136. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2}$.
- ◇ 4.137. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$. 4.138. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\{x\}}{\sqrt[3]{x}}$.
- ✓ 4.139. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right], a \neq 0$. 4.140. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + \left[\frac{1}{x} \right] \right)$.
- 4.141. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\left[\frac{1}{x} \right] + \left[\frac{2}{x} \right] + \dots + \left[\frac{k}{x} \right] \right), k \in \mathbb{N}$.

Доказать равенство (4.142–4.145).

- ◇ 4.142. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \cos x) = \infty$. 4.143. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x) \ln x = +\infty$.
- ✓ 4.144. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \operatorname{arctg} x) = +\infty$. 4.145. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x} (\{x\} + 1) = -\infty$.

Применяя теорему о пределе композиции, найти предел (4.146–4.149).

- 4.146. $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg}(x^3 - x^2 - x - 1)$. ✓ 4.147. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sqrt{1 - \cos x - x})$.
- 4.148. $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\sin \frac{1}{x}} \ln(x^2 + x + 1)$. ◇ 4.149. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x^2)}$.
- ✓ 4.150. а) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = +\infty$.
- б) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = 0$.
- ✓ 4.151. Пусть функция $f(x)$ положительна и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$.

4.152. Доказать, что

а) если $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t)) = +\infty$;

б) если $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = l$.

Доказать равенство (4.153–4.162).

- 4.153° $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x^q} = 0, 0 < p < q$. 4.154° $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0, 0 < a < b$.
- ◇ 4.155. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = 0$. ◇ 4.156. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0, a > 1, p > 0$.
- 4.157. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 0$. ◇ 4.158. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0, a > 1, q > 0$.
- 4.159. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{a^x} = 0, a > 1$. 4.160. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x = 0, a > 1, n \in \mathbb{N}$.
- ◇ 4.161. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. ✓ 4.162. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_a x = 0, a > 1, p > 0$.

Найти предел степенно-показательной функции (4.163–4.176).

- ✓ 4.163° $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$. 4.164° $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$.

$$\diamond 4.165^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{x^2+3}$$

$$4.166^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^{\cos \pi x}$$

$$4.167. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{3x}{x+1}}$$

$$4.168. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)^{x^2}$$

$$\checkmark 4.169. \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$4.170. \lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$\diamond 4.171. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}$$

$$4.172. \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{\arccos x}}$$

$$4.173. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x^2-1} \right)^{\frac{x}{|x-2|}}$$

$$4.174. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{(x-1)^2} \right)^x$$

$$\diamond 4.175. \lim_{x \rightarrow \pi+} (\sin^2 x)^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$4.176. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^3+1} \right)^{\sqrt{x}}$$

Раскрыть неопределённость вида 0^0 или ∞^0 (4.177–4.185).

$$4.177^\circ \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$4.178. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$$

$$\diamond 4.179. \lim_{x \rightarrow 0+} x^x$$

$$\diamond 4.180. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$4.181. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^{\frac{1}{x}} x$$

$$4.182. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln \ln x}}$$

$$\checkmark 4.183. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$$

$$4.184. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\cos x}$$

$$4.185^*. \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$$

$\checkmark 4.186.$ Доказать, что $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = l$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+b) = l$.

4.187. Доказать, что $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = l$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

Найти предел, применяя тождественные преобразования или сдвиг переменной (4.188–4.238) ($m, n \in \mathbb{N}$).

$$4.188^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$4.189^\circ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{2x^2+x-1}$$

$$\checkmark 4.190^\circ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$$

$$\diamond 4.191. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$$

$$4.192. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^3-3x-2}$$

$$\checkmark 4.193. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-12x+16}{x^2-4}$$

$$4.194. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1} \right)$$

$$\checkmark 4.195. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)-1}{x}$$

$$\diamond 4.196. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}$$

$$4.197. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-3x^4+3x^3-x^2}{x^4-6x^2+8x-3}$$

$$\diamond 4.198. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}-3x+2}{x^{50}+5x-6}$$

$$4.199. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{30}-3x^2+2}{x^{10}-5x^3+10x+4}$$

$$4.200. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^9-12x^6+256}{x^6-6x^4+32}$$

$$4.201. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-3x+2}{x^n+5x-6}$$

$$\checkmark 4.202. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$$

$$4.203. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{x^n-1} - \frac{m}{x^m-1} \right)$$

$$4.204^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\checkmark 4.205^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$$

$$4.206^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x^2+2x}{3x^3+7x+1}$$

$$4.207. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2+2)^3+(x^3-5)^2}{(2x+1)^6}$$

$$\diamond 4.208. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n}, \alpha_0 \beta_0 \neq 0.$$

- $\sqrt{4.209.} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - x + 1} - x \right).$
 $4.210. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^3) \dots (1+x^{2n-1})}{(1+nx^n)^n}.$
- $4.211^\circ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^3 + 8}.$
 $4.212. \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{2x-5} - 7}{\sqrt[3]{x} - 3}.$
- $\sqrt{4.213.} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - \sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13} + 2}.$
 $4.214. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{25+x} - \sqrt[3]{29-x}}{x - \sqrt{2x}}.$
- $4.215. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x).$
 $\sqrt{4.216.} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} + x).$
- $\diamond 4.217. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x).$
 $4.218. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x).$
- $4.219. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4 + 2x + x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}).$
- $4.220. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4 + 2x + x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}).$
- $4.221. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 1}).$
- $4.222. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}).$
- $4.223. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}).$
 $\sqrt{4.224.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x + 3x - 2x} - 3x).$
- $4.225. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x - 4x} - 2x).$
 $4.226^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{x^2}.$
- $4.227^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x}, a > 0.$
 $4.228^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x} - 4\sqrt[4]{1+x} + 1}{2 - 2\sqrt{1-x}}.$
- $4.229^\circ \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}.$
 $\diamond 4.230. \lim_{x \rightarrow \pi+} \sqrt{1 + \cos x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
- $\sqrt{4.231.} \lim_{x \rightarrow \pi+} \sqrt{1 - \cos 2x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
 $4.232. \lim_{x \rightarrow 0-} \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} \cdot \operatorname{cth} x.$
- $4.233. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4}{3 \sin^2 x - \cos^2 x}.$
 $\diamond 4.234. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x)}.$
- $4.235. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 4x + 4)}{\ln(5x^7 + x^4 + 2)}.$
 $\sqrt{4.236.} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\ln(2x^2 - x)}{\ln(x^4 + x^2 - x)}.$
- $\sqrt{4.237.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{ax^m + P(x)}{bx^n + Q(x)}, a, b > 0, \deg P \leq m-1, \deg Q \leq n-1.$
- $4.238. \lim_{x \rightarrow 0+} \ln \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots + a_k x^{m+k}}{b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + \dots + b_l x^{n+l}}, a_0, b_0 > 0, k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$
- $\diamond 4.239.$ Пусть $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$, $y(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$ и $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$, но $\lim_{x \rightarrow 0} f(y(x))$ не существует.
- $4.240.$ Пусть $f(y) = \operatorname{sgn}^2 y \cos y$, $y(x) = x \cos^2 \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$ и $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$, но $\lim_{x \rightarrow 0} f(y(x))$ не существует.
- $4.241.$ Пусть $f: \dot{U}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = l$. Доказать, что:
- а) $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = l$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = l$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sqrt[3]{x}) = l$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = l$.
- Выполнение каких равенств из пунктов а)–г) влечёт равенство $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = l$?
- $4.242.$ Пусть $f: \dot{U}(0) \rightarrow (0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$. Доказать, что тогда $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $4.243.$ Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$.

Используя подходящую замену переменной, найти предел (4.244–4.249) ($m, n \in \mathbb{N}$).

$$4.244. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}.$$

$$\diamond 4.245. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

$$\sqrt{4.246. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{\sqrt[3]{x} - 1} \right)}.$$

$$4.247. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}.$$

$$4.248. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + 1}{1 - 2\sqrt{x} + x}.$$

$$\sqrt{4.249. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}}.$$

Найти предел, пользуясь значением первого замечательного предела (4.250–4.271).

$$\sqrt{4.250^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}.$$

$$4.251^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}.$$

$$\sqrt{4.252^\circ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x}.$$

$$\sqrt{4.253. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}}.$$

$$4.254^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}.$$

$$4.255. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{2x}.$$

$$4.256^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin^2 3x}{\ln \sin^2 7x}.$$

$$\diamond 4.257^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$4.258^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{x^2}.$$

$$\sqrt{4.259^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$\sqrt{4.260^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$$

$$4.261^\circ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}.$$

$$\diamond 4.262^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$4.263^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}.$$

$$\sqrt{4.264^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$$

$$\sqrt{4.265. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}}.$$

$$4.266. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

$$4.267. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

$$4.268^* \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1}.$$

$$4.269^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

$$\sqrt{4.270. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)}.$$

$$4.271. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\pi - \operatorname{arctg} x).$$

$\diamond 4.272.$ Пользуясь равенством $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$, $x \in \mathbb{R}$ (см. задачу 3.243),

вывести второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Найти предел, пользуясь значением второго замечательного предела (4.273–4.293) ($a > 0$).

$$\sqrt{4.273^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

$$\sqrt{4.274^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$4.275^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^3} - 1}{x^3}.$$

$$4.276^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

$$\sqrt{4.277^\circ} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

$$\sqrt{4.278. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1}}{\arcsin x};}$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1}}{\arcsin x}.$$

$$\sqrt{4.279. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)})}.$$

$$4.280^* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{(x-4)e^x + xe^2}.$$

$$\diamond 4.281^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$4.282^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}.$$

$$4.283^\circ \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cth} x.$$

$$\sqrt{4.284. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}}.$$

$$4.285. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \operatorname{ch} x}{x^2}.$$

$$\diamond 4.286^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$4.287^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}, \quad a \neq 1.$$

$$4.288. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+2) - \ln x).$$

$$4.289. \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_2 \frac{8+x}{4+x}.$$

4.115. См. табл. 4.5.

		$\lim_{x \rightarrow \omega} g(x)$					
		$l_2 > 0$	0	$l_2 < 0$	∞	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l_1 > 0$	1	∞	$\frac{l_1}{l_2}$	0	0	0
	0	0	?	0	0	0	0
	$l_1 < 0$	$\frac{l_1}{l_2}$	∞	1	0	0	0
	∞	∞	∞	∞	?	?	?
	$+\infty$	$+\infty$	∞	$-\infty$?	?	?
	$-\infty$	$-\infty$	∞	$+\infty$?	?	?

Таблица 4.5. $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)}$

4.116. Например, а) $f(x) = \frac{2}{|x-a|}$, $g(x) = -\frac{1}{|x-a|}$;

б) $f(x) = \frac{1}{|x-a|}$, $g(x) = l - \frac{1}{|x-a|}$; в) $f(x) = \frac{1}{|x-a|}$, $g(x) = -\frac{2}{|x-a|}$;

г) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-a}, & x < a, \\ \frac{2}{x-a}, & x > a, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-a}, & x < a, \\ -\frac{1}{x-a}, & x > a, \end{cases}$

д) $f(x) = \frac{1}{|x-a|} + \sin \frac{1}{x-a}$, $g(x) = -\frac{1}{|x-a|}$.

4.117. Например, а) $f(x) = x - a$, $g(x) = (x - a)^3$; б) $f(x) = l(x - a)$, $g(x) = x - a$;

в) $f(x) = x - a$, $g(x) = -(x - a)^3$; г) $f(x) = x - a$, $g(x) = (x - a)^2$;

д) $f(x) = (x - a) \sin \frac{1}{x-a}$, $g(x) = x - a$.

4.119. $+\infty$. 4.120. $+\infty$. 4.121. $+\infty$. 4.122. $+\infty$. 4.123. $+\infty$. 4.124. ∞ .

4.125. $-\infty$. 4.126. $-\infty$. 4.127. $+\infty$. 4.128. ∞ . 4.129. 0. 4.130. ∞ .

4.131. 0. 4.132. $+\infty$. 4.133. 0. 4.134. 0. 4.135. 0. 4.136. 0. 4.137. 1.

4.138. 0. 4.139. $\frac{b}{a}$. 4.140. $\frac{1}{2}$. 4.141. $\frac{k(k+1)}{2}$. 4.146. $\frac{\pi}{4}$. 4.147. 1. 4.148. 0.

4.149. 0. 4.163. 1. 4.164. $\frac{1}{4}$. 4.165. $\frac{1}{4}$. 4.166. 2. 4.167. 0. 4.168. 0.

4.169. $+\infty$. 4.170. 0. 4.171. 0. 4.172. $+\infty$. 4.173. 0. 4.174. $+\infty$.

4.175. $+\infty$. 4.176. 0. 4.177. e . 4.178. $+\infty$. 4.179. 1. 4.180. 1. 4.181. 1.

4.182. 0. 4.183. 1. 4.184. 1. 4.185. 1. 4.188. 2. 4.189. $\frac{2}{3}$. 4.190. 5.

4.191. $-\frac{3}{2}$. 4.192. ∞ . 4.193. 0. 4.194. $-\frac{1}{2}$. 4.195. -6. 4.196. -2.

4.197. $\frac{1}{4}$. 4.198. $\frac{17}{55}$. 4.199. $\frac{8}{5}$. 4.200. 18. 4.201. $\frac{m-3}{n+5}$. 4.202. $\frac{m}{n}$.

4.203. $\frac{m-n}{2}$. 4.204. 0. 4.205. 1. 4.206. $\frac{1}{3}$. 4.207. $\frac{7}{16}$. 4.208. $\begin{cases} 0, & m < n, \\ \frac{\alpha_0}{\beta_0}, & m = n, \\ \infty, & m > n. \end{cases}$

4.209. 5. 4.210. $\frac{1}{n^n}$. 4.211. $\frac{1}{48}$. 4.212. $\frac{27}{7}$. 4.213. $\frac{3}{2}$. 4.214. $\frac{4}{27}$. 4.215. 1.

4.216. $-\frac{5}{2}$. 4.217. -2. 4.218. $-\frac{1}{2}$. 4.219. 3. 4.220. -3. 4.221. $\frac{2}{3}$.

4.222. $\frac{10}{3}$. 4.223. 0. 4.224. $\frac{1}{2}$. 4.225. $-\frac{1}{3}$. 4.226. $-\frac{1}{2}$. 4.227. $\frac{2\sqrt[3]{a}}{na}$.

- 4.228. 0. 4.229. 1. 4.230. $-\sqrt{2}$. 4.231. $-2\sqrt{2}$. 4.232. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4.233. $-\frac{3}{4}$.
- 4.234. $\frac{1}{5}$. 4.235. $\frac{2}{7}$. 4.236. 1. 4.237. $\begin{cases} +\infty, & n < m, \\ \ln \frac{a}{b}, & n = m, \\ -\infty, & n > m. \end{cases}$ 4.238. $\begin{cases} -\infty, & n < m, \\ \ln \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ +\infty, & n > m. \end{cases}$
- 4.241. а), б) Нет. Указание. Рассмотреть $f(y) = \operatorname{sgn} y$. в), г) Да. 4.244. 3.
- 4.245. $\frac{3}{4}$. 4.246. $-\frac{1}{2}$. 4.247. $\frac{m}{n}$. 4.248. $\frac{1}{6}$. 4.249. $\frac{1}{n}$. 4.250. $\frac{\pi}{2}$. 4.251. $\frac{4}{5}$.
- 4.252. $-\frac{1}{4}$. 4.253. $-\frac{1}{4}$. 4.254. π . 4.255. $\frac{1}{2}$. 4.256. 1. 4.257. $\frac{1}{2}$. 4.258. 24.
- 4.259. 1. 4.260. 1. 4.261. π . 4.262. 1. 4.263. $\frac{3}{2}$. 4.264. 1. 4.265. $\cos a$.
- 4.266. $-\sin a$. 4.267. $\frac{1}{\cos^2 a}$. 4.268. $-\frac{1}{2}$. 4.269. 3. 4.270. 1. 4.271. -1.
- 4.273. $\ln a$. 4.274. $\ln \frac{\alpha}{\beta}$. 4.275. $\ln 5$. 4.276. 1. 4.277. $\ln a$. 4.278. а) 1; б) -1.
- 4.279. 1. 4.280. ∞ . 4.281—4.283. 1. 4.284. $\frac{1}{2}$. 4.285, 4.286. 1. 4.287. $\frac{1}{\ln a}$.
- 4.288. 2. 4.289. $\frac{4}{\ln 2}$. 4.290. 2. 4.291. α . 4.292. $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$. 4.293. $a^a \ln \frac{a}{e}$.
- 4.295. e . 4.296. e^2 . 4.297. e . 4.298. 0. 4.299. \sqrt{e} . 4.300. e^3 . 4.301. e .
- 4.302. e . 4.303. e^2 . 4.304. \sqrt{e} . 4.305. $e^{-2/\pi}$. 4.306. e^π . 4.307. \sqrt{ab} .
- 4.308. $+\infty$. 4.309. $2e$. 4.310. $3e$. 4.311. $\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$. 4.313. а) Да, б), в) Нет, г), д) Да, е) Нет. 4.328. а) Нет, б) Да. 4.329. Нет. 4.330. а) Нет, б) Да.
- 4.333. $\alpha_0 x^n$. 4.334. $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$. 4.335. $x^{1/2}$. 4.336. $2^\alpha x^\alpha$. 4.337. x .
- 4.338. πx^2 . 4.339. $x^2 \ln 4$. 4.340. $2x$. 4.341. $\frac{1}{2x}$. 4.342. $\frac{4}{x}$.
- 4.343. $\frac{mn(n-m)}{2} x^2$. 4.344. $\alpha_{n-m} x^m$. 4.345. $x^{1/8}$. 4.346. $-\frac{5}{2} x^2$.
- 4.347. $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right) x$. 4.348. $-2x^{13/6}$. 4.349. $-\frac{\pi^2}{2} x^2$. 4.350. $x \ln \frac{a}{b}$. 4.351. ax .
- 4.352. $-7x^2$. 4.353. $x \ln 4$. 4.354. $\frac{1}{\pi x}$. 4.355. $10(x-1)$.
- 4.356. $\frac{n(n+1)}{2} (x-1)$. 4.357. $2\pi(x-1)^2$. 4.358. $\frac{(x-1)^2}{40}$.
- 4.359. $6(\ln 2 - \ln 3)(x-1)$. 4.360. $x-1$. 4.361. $-\frac{\pi^2}{8} (x-1)^2$.
- 4.362. $\frac{2}{\pi} (x-1)^{-1}$. 4.363. $-\frac{2}{\pi} \sqrt[3]{7} (x-1)^{-4/3}$. 4.364. $2(a-b)^{1/5} (x-1)^{-4/5}$.
- 4.365. $\sqrt{2}(1-x)^{1/2}$. 4.366. $\frac{a}{4n^2}$. 4.367. $-\frac{4\pi}{n^2}$. 4.368. $\frac{\pi k}{2n}$. 4.369. $\frac{1}{n} \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}$.
- 4.370. $-\frac{\pi}{4n}$. 4.371. $-\frac{\pi^2}{32n^2}$. 4.372. $\frac{1}{n^{3/2}}$. 4.373. $\frac{\ln 2}{n^2}$. 4.374. $\frac{1}{n}$.
- 4.375. $\frac{\ln 3}{n-1}$. 4.376. -2; нельзя. 4.377. 4; нельзя. 4.378. 0; нельзя. 4.379. $\alpha^2 - \beta^2$.
- 4.380. $\frac{4}{3}$. 4.381. -1. 4.382. $\frac{n(n+1)}{2}$. 4.383. $\frac{n(n+1)}{2}$.
- 4.384. $-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. 4.385. 1. 4.386. $\frac{3}{5}$. 4.387. $\frac{64}{3} \ln 2$. 4.388. $\frac{27 \ln 3}{256 \ln 2}$.
- 4.389. $\frac{1}{e}$. 4.390. $\frac{1}{e^{e+1}}$. 4.391. $\sqrt{2}$. 4.392. 1. 4.393. $\frac{40}{3}$. 4.394. $5(\alpha - \beta)$.
- 4.395. $\frac{5}{6}$. 4.396. а) $1 - \sqrt{2}$. б) $\sqrt{2} - 1$. 4.397. а) -2. б) 0. 4.398. а) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. б) $-\infty$.
- 4.399. $-\frac{1}{4}$. 4.400. -25. 4.401. $\frac{3}{7}$. 4.402. 2. 4.403. $4 - \pi$. 4.404. -12.
- 4.405. $-2\sqrt{2}\pi^2$. 4.406. $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$. 4.407. $-\frac{3\pi^2}{2}$. 4.408. -2. 4.409. 0.