

Доказать, что предел не существует (4.73–4.78).

$$\diamond 4.73. \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}. \quad 4.74. \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}. \quad \checkmark 4.75. \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x}.$$

$$4.76. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\sin x}. \quad \checkmark 4.77. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \quad 4.78. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

4.79. Привести пример ограниченной в некоторой окрестности нуля функции, для которой  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$  не существует, а  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$  существует.

4.80. Доказать, что функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда для всякой последовательности  $(x_n)$ , сходящейся к  $x_0$ , выполняется условие  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Показать, что функция  $f$  непрерывна в каждой точке своей области определения (4.81–4.92).

$$\begin{aligned} \diamond 4.81. f(x) &= kx + b. & \checkmark 4.82. f(x) &= \frac{1}{x}. \\ \checkmark 4.83. f(x) &= |x|. & 4.84. f(x) &= x^n, n \in \mathbb{N}. \\ 4.85. f(x) &= \sqrt[3]{x}. & 4.86. f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}. \\ \diamond 4.87. f(x) &= \sqrt{x^2 + a^2}. & 4.88. f(x) &= \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0. \\ 4.89. f(x) &= \sin x. & \checkmark 4.90. f(x) &= \cos x. \\ 4.91. f(x) &= \ln x. & 4.92. f(x) &= \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Исследовать функцию  $f$  на непрерывность справа и слева в точке  $x_0$  (4.93–4.99).

$$4.93^\circ f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0 \text{ (функция Хевисайда).}$$

$$\diamond 4.94. f(x) = [x], x_0 \in \mathbb{R}. \quad \checkmark 4.95. f(x) = \{x\}, x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$4.96. f(x) = \{\sqrt{x}\}, x_0 > 0. \quad \checkmark 4.97. f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

4.98.  $f(x) = \pi(x)$  — количество простых чисел, не превосходящих  $x$ ,  $x_0 > 0$ .

4.99.  $f(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : H_n \geq x\}$ ,  $x_0 = \frac{11}{6}$  ( $H_n$  — гармоническое число).

4.100. Пусть функция  $f$  непрерывна справа в точке  $x_0$ . Доказать, что функция  $f(-x)$  непрерывна слева в точке  $-x_0$ .

$\checkmark 4.101$ . Обозначим  $[x] = \min\{n \in \mathbb{N} : n \geq x\}$ . Исследовать функцию  $f(x) = [x]$  на непрерывность справа и слева в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Найти предел функции, пользуясь арифметическими свойствами (4.102–4.107).

$$4.102^\circ \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x - 1). \quad 4.103^\circ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos x.$$

$$\checkmark 4.104. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}. \quad \diamond 4.105. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$4.106. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4}{x^2 - 8}. \quad 4.107. \lim_{x \rightarrow \pi/12} \frac{\cos 2x \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x \sin 6x}.$$

Доказать непрерывность функции на области определения, пользуясь арифметическими свойствами (4.108–4.112).

$$4.108^\circ f(x) = |x| + |x - 1|. \quad 4.109^\circ f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

$$\diamond 4.110. f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n.$$

4.111.  $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  (тригонометрический многочлен).

4.112.  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены.

4.113. Найти такой многочлен  $g(x)$  наименьшей степени, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{1+x^2}, & 1 \leq |x| \leq 2, \\ g(x), & |x| < 1 \text{ или } |x| > 2, \end{cases} \quad \text{была непрерывна в каждой точке } x_0 \in \mathbb{R}.$$

✓ 4.114. Доказать, что

а) если  $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = +\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow \omega} (-f(x)) = -\infty$ ;

б) если  $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = -\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow \omega} (-f(x)) = +\infty$ .

На основе этих свойств и табл. 4.1 составить аналогичную таблицу для предела разности функций.

✓ 4.115. Доказать, что

а) если  $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{1}{f(x)} = 0$ ;

б) если  $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{1}{f(x)} = \infty$ .

На основе этих свойств и табл. 4.2 составить аналогичную таблицу для предела отношения функций.

4.116. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ . Показать на примерах, что возможны следующие ситуации: а)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l \in \mathbb{R}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  не существует.

4.117. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Показать на примерах, что возможны следующие ситуации: а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  не существует.

✓ 4.118. Пусть  $P(x) = ax^n + Q(x)$ , где  $Q(x)$  — многочлен степени не выше  $n-1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$ , если  $a > 0$  и  $n$  чётно;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$ , если  $a < 0$  и  $n$  чётно;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$ , если  $a \neq 0$  и  $n$  нечётно.

Найти предел, пользуясь арифметическими свойствами бесконечно больших функций, представленными в табл. 4.1 и 4.2 (4.121—4.132).

4.119.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x + 2^{1/x})$ .

4.120.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^6)$ .

✓ 4.121.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} + x)$ .

4.122.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$ .

4.123.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ .

4.124.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4}{x^2 - 4}$ .

◇ 4.125.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2^x}$ .

4.126.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{x}$ .



$$4.127. \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\operatorname{ctg} x}{e^x}.$$

$$\diamond 4.129. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}.$$

$$\checkmark 4.131. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 2^{-x}}.$$

Найти предел, пользуясь принципом двустороннего ограничения или теоремой о произведении ограниченной и бесконечно малой функций (4.133–4.141).

$$\checkmark 4.133^\circ. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

$$\diamond 4.135. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

$$\diamond 4.137. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}.$$

$$\checkmark 4.139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left[ \frac{b}{x} \right], a \neq 0.$$

$$4.141. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left( \left[ \frac{1}{x} \right] + \left[ \frac{2}{x} \right] + \dots + \left[ \frac{k}{x} \right] \right), k \in \mathbb{N}.$$

Доказать равенство (4.142–4.145).

$$\diamond 4.142. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \cos x) = \infty.$$

$$\checkmark 4.144. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \operatorname{arctg} x) = +\infty.$$

$$4.143. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x) \ln x = +\infty.$$

$$4.145. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x} (\{x\} + 1) = -\infty.$$

Применяя теорему о пределе композиции, найти предел (4.146–4.149).

$$4.146. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg}(x^3 - x^2 - x - 1). \quad \checkmark 4.147. \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sqrt{1 - \cos x} - x).$$

$$4.148. \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\sin \frac{1}{x}} \ln(x^2 + x + 1). \quad \diamond 4.149. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x^2)}.$$

$$\checkmark 4.150. \text{ а) Пусть } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty. \text{ Доказать, что } \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = +\infty.$$

$$\text{ б) Пусть } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \text{ Доказать, что } \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = 0.$$

$$\checkmark 4.151. \text{ Пусть функция } f(x) \text{ положительна и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \text{ Доказать, что}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

4.152. Доказать, что

$$\text{ а) если } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \text{ то } \lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t)) = +\infty;$$

$$\text{ б) если } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = l.$$

Доказать равенство (4.153–4.162).

$$4.153^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x^q} = 0, 0 < p < q.$$

$$4.154^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0, 0 < a < b.$$

$$\diamond 4.155. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = 0.$$

$$\diamond 4.156. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0, a > 1, p > 0.$$

$$4.157. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 0.$$

$$\diamond 4.158. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0, a > 1, q > 0.$$

$$4.159. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{a^x} = 0, a > 1.$$

$$4.160. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x = 0, a > 1, n \in \mathbb{N}.$$

$$\diamond 4.161. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

$$\checkmark 4.162. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_a x = 0, a > 1, p > 0.$$

Найти предел степенно-показательной функции (4.163–4.176).

$$\checkmark 4.163^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{3-x} \right)^x.$$

$$4.164^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}.$$

$$4.128. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x.$$

$$4.130. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}.$$

$$4.132. \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| \operatorname{arccctg} x + \ln(x^2 + 1)).$$

$$\diamond 4.165^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \sin \frac{\pi x}{4} \right)^{x^2+3}$$

$$4.166^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x^2+1} \right)^{\cos \pi x}$$

$$4.167. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{3x}{x+1}}$$

$$4.168. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)^{x^2}$$

$$\checkmark 4.169. \lim_{x \rightarrow 1-} \left( \frac{x^2}{x^2+1} \right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$4.170. \lim_{x \rightarrow 1+} \left( \frac{x^2}{x^2+1} \right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$\diamond 4.171. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}$$

$$4.172. \lim_{x \rightarrow 1-} \left( \frac{x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{\arccos x}}$$

$$4.173. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{x^2-1} \right)^{\frac{x}{|x-2|}}$$

$$4.174. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{(x-1)^2} \right)^x$$

$$\diamond 4.175. \lim_{x \rightarrow \pi+} (\sin^2 x)^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$4.176. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{x^3+1} \right)^{\sqrt{x}}$$

Раскрыть неопределённость вида  $0^0$  или  $\infty^0$  (4.177–4.185).

$$4.177^\circ \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$4.178. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$$

$$\diamond 4.179. \lim_{x \rightarrow 0+} x^x$$

$$\diamond 4.180. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$4.181. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^{\frac{1}{x}} x$$

$$4.182. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln \ln x}}$$

$$\checkmark 4.183. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$$

$$4.184. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\cos x}$$

$$4.185^* \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$$

$\checkmark 4.186.$  Доказать, что  $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = l$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+b) = l$ .

$4.187.$  Доказать, что  $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = l$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .

Найти предел, применяя тождественные преобразования или сдвиг переменной (4.188–4.238) ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

$$4.188^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$4.189^\circ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{2x^2+x-1}$$

$$\checkmark 4.190^\circ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$$

$$\diamond 4.191. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$$

$$4.192. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^3-3x-2}$$

$$\checkmark 4.193. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-12x+16}{x^2-4}$$

$$4.194. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1} \right)$$

$$\checkmark 4.195. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)-1}{x}$$

$$\diamond 4.196. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}$$

$$4.197. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-3x^4+3x^3-x^2}{x^4-6x^2+8x-3}$$

$$\diamond 4.198. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}-3x+2}{x^{50}+5x-6}$$

$$4.199. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{30}-3x^2+2}{x^{10}-5x^3+10x+4}$$

$$4.200. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^9-12x^6+256}{x^6-6x^4+32}$$

$$4.201. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-3x+2}{x^n+5x-6}$$

$$\checkmark 4.202. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$$

$$4.203. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{n}{x^n-1} - \frac{m}{x^m-1} \right)$$

$$4.204^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\checkmark 4.205^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$$

$$4.206^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x^2+2x}{3x^3+7x+1}$$

$$4.207. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2+2)^3+(x^3-5)^2}{(2x+1)^6}$$

$$\diamond 4.208. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n}, \alpha_0 \beta_0 \neq 0.$$