3.218. $a_1 = \frac{b}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + a_n^2}{a+1}}$, $a > 0$, $b > 0$.

3.219. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{a_n}}$. ✓**3.220*.** $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{a_n}$.

3.221*. $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \frac{a}{2 + a_n}$. **3.222.** $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.

◇**3.223.** $a_1 = 9$, $a_2 = 6$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.

✓**3.224.** $a_1 = a$, $a_{n+1} = \sin a_n$. **3.225.** $a_1 = a$, $a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n$.

3.226*. $a_1 = a$, $a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}|$.

3.227*. Найти все значения $a \geqslant -3$, при которых сходится последовательность (a_n), $a_1 = \frac{a}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a + a_n^2}{2}$, и при этих значениях a найти предел последовательности (a_n).

3.228*. Последовательность (a_n) такова, что $0 < a_n < 1$ и $a_n(1 - a_{n+1}) \geqslant \frac{1}{4}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти её предел.

3.229. Пусть $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$. Доказать, что последовательность $(\sqrt{a_n})$ сходится к положительному корню уравнения $x^4 - x - 2 = 0$.

3.230*. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ и $a_n = \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \ldots + \sqrt[p]{1}}}$ (n корней). Доказать, что последовательность (a_n) сходится к положительному корню уравнения $x^p - x - 1 = 0$.

3.231. Пусть $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $a_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

3.232. Пусть последовательность (a_n) ограничена и $a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{c}{2^n}$, $c > 0$. Доказать, что последовательность (a_n) сходится.

3.233. Пусть последовательность (a_n) ограничена, последовательность (b_n) сходится и $a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \geqslant b_{n+2} - \frac{3}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность (a_n) сходится.

3.234*. Обязательно ли последовательность (a_n) сходится, если она ограничена и $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство: а) $a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{n^2}$; б) $a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{n}$?

◇**3.235.** Пусть $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) имеют общий предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$, причём $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ и $2 < e < 3$.

✓**3.236.** Доказать неравенство $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3.237. Доказать, что $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ при $n \to \infty$.

3.238. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{nk}^n}$, $k \geqslant 2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^k}{n^{kn}}}$.

✓**3.239.** Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $\frac{1}{4n} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

✓**3.240.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

✓**3.241.** Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$;

б) $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\alpha_n}{n \cdot n!}$, где $0 < \alpha_n < 1$;
в) число e иррационально; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi e n!) = 0$;
д) $\frac{1}{(n+1)^2} < 1 - \alpha_n < \frac{2}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$; е) $1 - \alpha_n \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$.

3.242. Пусть $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n-1} + 1)$ при $n \geqslant 2$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = e.$$

✓**3.243.** Пусть $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Доказать, что
а) функция $\exp(x)$ определена на $\mathbb{R}$, т. е. предел существует при всех $x \in \mathbb{R}$;
б) $\exp(x) > 1$ и $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ при всех $x > 0$;
в) $\exp(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $\exp(0) = 1$;
г) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$;
д) $\exp(x) = e^x$ при всех $x \in \mathbb{Q}$;
е) функция $\exp(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$; ж) $\exp(x) \geqslant 1 + x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

✓**3.244.** Пусть $a_1 = a > 0$, $b_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) монотонны и сходятся к общему пределу $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (*арифметико-геометрическое среднее* a и b).

3.245. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a > b > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) монотонны и сходятся к общему пределу.

3.246. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a > b > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) монотонны и сходятся к общему пределу. Найти этот предел.

3.247. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) монотонны и сходятся к общему пределу. Найти этот предел.

◇**3.248.** Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$.

3.249. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = +\infty$.

✓**3.250.** Доказать, что если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.

✓**3.251.** Доказать, что если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

3.252. Пусть последовательность (x_n) положительна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in (0; +\infty)$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = a$ (последовательность средних гармонических сходится к тому же пределу).

Пользуясь теоремой Штольца, найти пределы (3.253—3.268), $k \in \mathbb{N}$.

✓**3.253.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$. **3.254.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right)$.

◇**3.255.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Разложения элементарных функций по формуле Тейлора и методы нахождения пределов можно использовать и при исследовании асимптотического поведения последовательностей, в том числе заданных рекуррентно.

Задача 4.719. Пусть последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$. Найти главную часть a_n вида Cn^α при $n \to \infty$.

Решение. Сначала докажем по индукции, что $0 < a_{n+1} < a_n \leqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ это неравенство верно: $0 < \sin 1 < 1$. Пусть оно выполнено для номера n, тогда в силу неравенства $0 < \sin x < x$, которое справедливо при $0 < x < \pi$, получаем $0 < a_{n+2} = \sin a_{n+1} < a_{n+1} < a_n \leqslant 1$, т. е. доказываемое неравенство имеет место и для номера $n+1$.

Из доказанного следует, что последовательность (a_n) убывает и ограничена снизу, поэтому по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Значение a найдём, переходя к пределу в равенстве $a_{n+1} = \sin a_n$: получаем $a = \sin a$, откуда $a = 0$. Поскольку $\sin x = x(1 - x^2/6 + o(x^3))$, $x \to 0$, и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем

$$\frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{\sin^2 a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}^2}\left(1 - \frac{a_{n-1}^2}{6} + o(a_{n-1}^3)\right)^{-2} = \frac{1}{a_{n-1}^2}\left(1 + \frac{a_{n-1}^2}{3} + o(a_{n-1}^3)\right),$$

или $\dfrac{1}{a_n^2} = \dfrac{1}{a_{n-1}^2} + \dfrac{1}{3} + o(a_{n-1})$, и многократное применение этого соотношения даёт после деления на n равенство

$$\frac{1}{na_n^2} = \frac{1}{na_1^2} + \frac{n-1}{3n} + \frac{o(a_1) + \ldots + o(a_{n-1})}{n}.$$

Согласно теореме Штольца последнее слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{na_n^2} = \dfrac{1}{3}$, т. е. $a_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ при $n \to \infty$, тем самым, найдена главная часть a_n при $n \to \infty$. □

Задачи

Доказать равенство, пользуясь определением предела (4.1—4.16).

✓**4.1°.** $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$. ◇**4.2°.** $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 4$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 5, \\ 4, & x \neq 5. \end{cases}$

◇**4.3.** $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$. ✓**4.4.** $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. **4.5.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x^2} = 1$. **4.7.** $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. ✓**4.8.** $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 4$.

4.9. $\lim\limits_{x\to -8} \sqrt[3]{x} = -2$. ✓**4.10.** $\lim\limits_{x\to 4} \log_2 x = 2$. ◇**4.11.** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sin x = 1$.

✓**4.12.** $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = -1$. **4.13.** $\lim\limits_{x\to \pi/4} \operatorname{tg} x = 1$. **4.14.** $\lim\limits_{x\to \pi/3} \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{3}$. **4.16*.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$.

Пользуясь определением одностороннего предела, доказать равенство, где $n \in \mathbb{Z}$ (4.17—4.25).

4.17°. $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$. **4.18°.** $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$. ✓**4.19°.** $\lim\limits_{x\to n+} [x] = n$.

✓**4.20°.** $\lim\limits_{x\to n-}[x]=n-1.$ **4.21.** $\lim\limits_{x\to n+}\{x\}=0.$ **4.22.** $\lim\limits_{x\to n-}\{x\}=1.$

4.23. $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0.$ ◇**4.24.** $\lim\limits_{x\to 0-}2^{1/x}=0.$ **4.25.** $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\log_2 x}=0.$

Доказать равенство, пользуясь определением предела в несобственной точке (4.26—4.33).

4.26°. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$ ✓**4.27.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c},\ c\neq 0.$

4.28. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0.$ **4.29.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{cth}x=-1.$

✓**4.30.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}.$ **4.31.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi.$

◇**4.32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+px+q}=0.$ **4.33.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\sin x}{\sqrt{x}+1}=0.$

Записать соотношение формально с помощью кванторов (4.34—4.51).

✓**4.34.** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty.$ **4.35.** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty.$ **4.36.** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty.$

4.37. $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty.$ **4.38.** $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=+\infty.$ **4.39.** $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=-\infty.$

◇**4.40.** $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\infty.$ **4.41.** $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=+\infty.$ **4.42.** $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=-\infty.$

4.43. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty.$ **4.44.** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty.$ **4.45.** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty.$

4.46. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty.$ **4.47.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$ **4.48.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$

✓**4.49.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$ **4.50.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$ **4.51.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$

✓**4.52°.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty.$

Доказать соотношение, используя определение бесконечно большой функции (4.53—4.70).

✓**4.53°.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}=\infty.$ **4.54°.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty.$

4.55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2n}}=+\infty,\ n\in\mathbb{N}.$ **4.56.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=\infty.$

◇**4.57.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{x}}=\infty,\ n\in\mathbb{N}.$ **4.58.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{\sqrt{|x-\pi|}}=-\infty.$

4.59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|2^x-1|}=+\infty.$ ✓**4.60.** $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|=-\infty.$

✓**4.61.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\operatorname{tg}x=\infty.$ **4.62.** $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{cth}x=\infty.$

✓**4.63°.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p=+\infty,\quad p>0.$ **4.64.** $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty.$

4.65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty.$ ✓**4.66.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+px+q}=+\infty$

4.67. $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{ctg}x=-\infty.$ **4.68.** $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/x^3}=+\infty.$

◇**4.69.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}\operatorname{arctg}x=+\infty.$ ✓**4.70.** $\lim\limits_{x\to 0+}\log_a x=-\infty,\ a>1.$

4.71. Пусть предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ существует и не равен нулю. Доказать, что:

а) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ не существует, то и $\lim\limits_{x\to a}f(x)\varphi(x)$ не существует;

б) если функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x\to a$, то и $f(x)\varphi(x)$ — бесконечно большая функция при $x\to a$.

4.72. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой проколотой окрестности точки a. Доказать, что либо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$, либо оба этих предела не существуют.