График функции $f(x)$ из рассмотренного примера см. выше.

5.1.4. Дифференцирование параметрически заданной, обратной и неявной функций

Если функция $y(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, причём существует $y'(x_0) \neq 0$, то на образе этой окрестности определена обратная функция $x(y)$, дифференцируемая в точке $y_0 = y(x_0)$, и для её производной справедливо равенство $x'(y_0) = \dfrac{1}{y'(x_0)}$.

Отметим, что обратная функция $x(y)$ монотонна на указанной окрестности точки y_0, причём её характер монотонности совпадает с характером монотонности функции $y(x)$.

Задача 5.161. Найти производную функции, обратной к функции $y(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

Решение. Функция $y(x)$ дифференцируема, возрастает на всей числовой оси как сумма двух дифференцируемых возрастающих функций и принимает все действительные значения. Имеем

$$y'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2+x^2}{1+x^2} > 0 \quad \text{для всех } x.$$

Следовательно, на $\mathbb{R}$ существует обратная функция $x(y)$, она также возрастает, и её производная равна $x'(y) = \dfrac{1+x^2(y)}{2+x^2(y)}$. □

Если функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна на некотором интервале $(\alpha;\beta)$, то на промежутке $x((\alpha;\beta))$ определена обратная функция $t(x)$; тем самым на этом промежутке определена функция $y = f(x) = y(t(x))$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ задана *параметрически*. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на $(\alpha;\beta)$ и $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, то функция $y = f(x)$ дифференцируема на $x((\alpha;\beta))$ и $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Внимание! При рассмотрении параметрически заданных функций (и только в этом случае!) во избежание путаницы производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t будем обозначать через $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ соответственно; производную же функции $y = f(x)$ по переменной x будем, как обычно, обозначать y'. Таким образом, формула для производной параметрически заданной функции записывается в виде $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Производная $y' = f'(x)$ связана с аргументом x, как и исходная функция $y = f(x)$, через параметр t: $y' = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$, $x = x(t)$. Поэтому при выполнении соответствующих условий вторая производная y по x равна

$$y'' = (y')' = \frac{\dfrac{d}{dt}(y')}{\dot{x}} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

Аналогичным способом можно отыскать производные более высоких порядков.

Задача 5.167. Найти y', y'' и y''', если функция $y = f(x)$ задана параметрически: $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$.

Решение. Поскольку функция $\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$ положительна при $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, в соответствующих точках получаем

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}, \quad y'' = -\frac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} : \left(2a\sin^2\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

$$y''' = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot\sin^5\dfrac{t}{2}} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}.$$ □

Формула для производной параметрически заданной функции широко используется при преобразовании выражений, содержащих производные.

Задача 5.177. В выражении $(1-x^2)y' - xy$, где $y = y(x)$, $x \in (-1; 1)$, перейти к переменной t, если $x = \sin t$.

Решение. Пользуясь равенством $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, получаем

$$(1-x^2)y' - xy = (1-\sin^2 t)\frac{\dot{y}}{\cos t} - y\sin t = \dot{y}\cos t - y\sin t.$$

□

Задача 5.181. В выражении $(1+x^2)y'' - y$, где $y = y(x)$, перейти к функции $u = u(t)$, если $y = \dfrac{u}{\cos t}$, $x = \operatorname{tg} t$.

Решение. Имеем $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{\dot{u}\cos t + u\sin t}{\cos^2 t}\cos^2 t = \dot{u}\cos t + u\sin t$. Далее,

$$y'' = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \cos^2 t(\ddot{u}\cos t - \dot{u}\sin t + \dot{u}\sin t + u\cos t) = \cos^3 t(\ddot{u} + u).$$

Подставляя выражения для y и y'' в исходное выражение, получаем

$$(1+\operatorname{tg}^2 t)(\ddot{u}+u)\cos^3 t - \frac{u}{\cos t} = \frac{\ddot{u}\cos^2 t - u\sin^2 t}{\cos t}.$$

□

Задача 5.187. В выражении $2y'' + (x+y)(1-y')^3$, где $y = y(x)$, перейти к функции $v = v(t)$, если $x = v + t$, $y = v - t$.

Решение. Имеем $\dot{x} = \dot{v} + 1$, $\dot{y} = \dot{v} - 1$, откуда находим

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{v}-1}{\dot{v}+1}; \quad y'' = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{v}-1}{\dot{v}+1}\right) = \frac{2\ddot{v}}{(\dot{v}+1)^3}.$$

Подставляя выражения для x, y, y', y'' в исходное выражение, получаем

$$\frac{4\ddot{v}}{(\dot{v}+1)^3} + 2v\left(1 - \frac{\dot{v}-1}{\dot{v}+1}\right)^3 = \frac{4\ddot{v} + 16v}{(\dot{v}+1)^3}.$$

□

Рассмотрим теперь дифференцирование функции, заданной неявно, т.е. равенством $F(x, y(x)) = 0$. Предположим, что такая функция $y(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале $(\alpha; \beta)$. Тогда при формальном дифференцировании равенства $F(x, y(x)) = 0$ по переменной x получим линейное относительно $y'(x)$ уравнение, из которого при выполнении некоторых условий можно найти выражение этой производной (условие существования и дифференцируемости заданной таким образом функции $y(x)$ рассматривается в теории функций нескольких переменных, см. § 8.5).

Задача 5.190. Уравнение $x^3 + y^3 - y^5 - x = 0$ определяет функцию $y = y(x)$. Найти $y'(1)$, если $y(1) = 1$.

Решение. Заметим, что значения $x = 1$ и $y = 1$ удовлетворяют данному уравнению. Дифференцируя равенство $x^3 + y^3(x) - y^5(x) - x = 0$ по переменной x, получаем $3x^2 + 3y^2y'(x) - 5y^4y'(x) - 1 = 0$. При $x = 1$ и $y = 1$ имеем $3 + 3y'(1) - 5y'(1) - 1 = 0$, откуда $y'(1) = 1$. □

При соответствующих условиях функция $y(x)$ будет иметь и производные высших порядков, которые определяются уравнениями $(F(x, y(x)))'' = 0$, $(F(x, y(x)))''' = 0$ и т. д.

Задача 5.196. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $\ln(x^2 + y^2) = x - y$ и $x_0 = y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Найти $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$.

Решение. Дифференцируя равенство $\ln(x^2+y^2(x)) = x - y(x)$, имеем

$$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} - 1 + y' = 0,$$

или, поскольку $x^2+y^2 \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0),

$$2x + 2yy' - (1-y')(x^2+y^2) = 0, \tag{2}$$

откуда следует, что $y'(x) = \dfrac{x^2+y^2(x)-2x}{x^2+y^2(x)+2y(x)}$, следовательно, $y'\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) = 2\sqrt{2}-3$.

Дифференцируя по x равенство $y' = \dfrac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2+2y}$, получим y''. Заметим, что в равенство, определяющее y'', входит y', которое уже найдено. Технически проще найти y'', дифференцируя равенство (2). В нашем случае имеем

$$2+2(y')^2+2yy''+(x^2+y^2)y''-(1-y')(2x+2yy') = 0,$$

поэтому

$$2+2(2\sqrt{2}-3)^2+\sqrt{2}y''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)+y''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)-(1-(2\sqrt{2}-3))(\sqrt{2}+\sqrt{2}(2\sqrt{2}-3)) = 0,$$

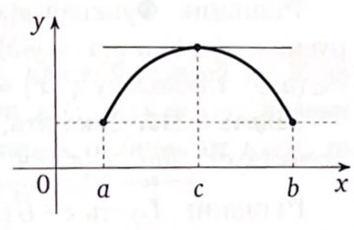
$$y''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = 4(7-5\sqrt{2}).$$ □

§ 5.2. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

Теорема (Ферма). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет локальный экстремум в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.*

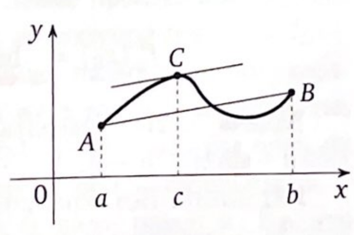
Теорема (Ролль). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$.*

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что на гладкой кривой $y = f(x)$ между точками с одинаковыми ординатами найдётся точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.



Теорема (Лагранж). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Заметим, что величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке c. Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что на гладкой кривой $y = f(x)$ между точками A и B найдётся точка C, касательная в которой параллельна секущей AB.

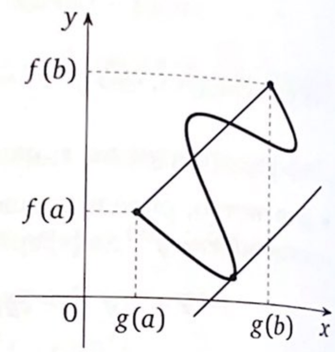


Теорема (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;\, b)$. Тогда найдётся такая точка $c \in (a;\, b)$, что*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Если к тому же $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a;\, b)$, то $g(a) \neq g(b)$ и справедливо равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$



Геометрическая интерпретация теоремы Коши состоит в следующем. Пусть функции f и g удовлетворяют её условию. Тогда на дуге кривой $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a;\, b]$, найдётся такая точка, в которой касательная к этой кривой параллельна хорде, соединяющей начало и конец дуги.

Задача 5.198. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle \alpha;\, \beta \rangle$ и $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, где $\alpha < a < b < \beta$. Доказать, что существует такая точка $c \in (a;\, b)$, что $f'(c) = 0$.

Решение. Пусть для определённости $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$. Тогда найдётся такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(a)$ при всех $x \in (a;\, a+\delta)$ и $f(x) < f(b)$ при всех $x \in (b-\delta;\, b)$. Таким образом, точки a и b не являются точками максимума непрерывной на отрезке $[a;\, b]$ функции $f(x)$. Следовательно, такой точкой является некоторая точка $c \in (a;\, b)$, для которой в силу теоремы Ферма получаем $f'(c) = 0$. □

Задача 5.204. Пусть функция $f \in C[a;\, b]$ дифференцируема на $(a;\, b)$ и $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. Доказать, что уравнение $f(x)f'(x) = x$ имеет хотя бы один корень на интервале $(a;\, b)$.

Решение. Функция $g(x) = f^2(x) - x^2$ непрерывна на $[a;\, b]$, дифференцируема на $(a;\, b)$ и $g(a) = g(b)$. По теореме Ролля $g'(c) = 0$ для некоторой точки $c \in (a;\, b)$. Поскольку $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2x$, получаем $f(c)f'(c) = c$. □

Задача 5.215. Доказать, что если для непрерывной в точке x_0 функции f существует $\lim\limits_{x \to x_0+} f'(x) = l$, то существует $f'_+(x_0) = l$.

Решение. Пусть $x \in U(x_0)$, $x > x_0$. По теореме Лагранжа существует такое число $c = c(x) \in (x_0;\, x)$, что $f(x) - f(x_0) = f'(c(x))(x - x_0)$. Если $x \to x_0+$, то и $c = c(x) \to x_0+$, поэтому, пользуясь определением правой производной в точке x_0, получаем

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} f'(c(x)) = l. \quad \square$$

Задача 5.226. Доказать, что для всех $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $a < b$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[a;\, b]$, получаем

$$|\sin a - \sin b| = |\cos c| \cdot |a - b| \leqslant |a - b|, \quad c \in (a;\, b). \quad \square$$

$1+x$ $\sqrt{1-2x}$. **5.148.** $\frac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$.

✓**5.149.** $\cos^4 x$. **5.150.** $\sin x \cdot \cos^2 2x$. **5.151.** $x^2 \sin^2 x$.

✓**5.152.** $e^{-x} \cos x$. **5.153.** $e^{3x} \sin 4x$. **5.154.** $e^x \cos^2 x$.

5.155. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Доказать равенства:

✓а) $(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{\pi n}{4}\right)$;

б) $(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $x > 0$;

в) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right)$, $x > 0$;

г) $(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$.

◊**5.156.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, причём $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

5.157. Доказать, что функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, если

✓а) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}} & \text{при } x \in (a; b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a; b). \end{cases}$

5.158. Пусть $f(x)=\sqrt{x^2-1}$. Доказать, что $f^{(2n)}(x)<0$ и $f^{(2n-1)}(x)>0$ при всех $x>1$ и $n\in\mathbb{N}$.

5.159. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_nx)}$, причём $a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k>0$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Доказать, что $f^{(k)}(0)>0$ при всех $k\in\mathbb{N}$.

Найти производную функции $x(y)$, обратной к функции $y(x)$ (5.160—5.165).

✓**5.160**°. $y(x)=x^3+3x$.

◇**5.161.** $y(x)=x+\operatorname{arctg}x$.

5.162. $y(x)=x+\ln x$.

5.163. $y(x)=x^2+\ln x$.

5.164. $y(x)=x+e^x$.

✓**5.165.** $y(x)=x-a\sin x$, $0<a<1$.

5.166. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\in(0;2)\cap\mathbb{Q},\\ 2x-1, & \text{если } x\in(0;2)\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ дифференцируема только при $x=1$ и $f'(1)\neq 0$. Является ли обратная функция дифференцируемой в точке $f(1)=1$?

Найти производную указанного порядка функции, заданной параметрически (5.167—5.175).

◇**5.167.** $y',\ y'',\ y'''$: $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$.

✓**5.168.** y'': $x(t)=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$, $\quad y(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

5.169. y'': $x(t)=a\left(\cos t-\ln\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)$, $\quad y(t)=a\sin t$.

5.170. y'': $x(t)=t^3+3t$, $\quad y(t)=t\operatorname{arctg}t-\ln\sqrt{1+t^2}$.

✓**5.171.** y''': $x(t)=e^t(\cos t+\sin t)$, $\quad y(t)=e^t(\cos t-\sin t)$.

5.172. y''': $x(t)=a(1+\cos t)\cos t$, $\quad y(t)=a(1-\cos t)\sin t$.

5.173. y''': $x(t)=a\cos t+(at+b)\sin t$, $\quad y(t)=a\sin t-(at+b)\cos t$.

5.174. y''': $x(t)=a\cos^5 t$, $\quad y(t)=a\sin^5 t$.

5.175. y''': $x(t)=t^2$, $\quad y(t)=\ln\sin t-t\operatorname{ctg}t$.

Сделать указанную замену переменных в выражении, содержащем производные (5.176—5.189).

5.176. $v''+\dfrac{v'}{x}+\left(1-\dfrac{\mu^2}{x^2}\right)v$, $\quad u=\sqrt{x}v$, $u=u(x)$.

◇**5.177.** $(1-x^2)y'-xy$, $\quad x=\sin t$, $y=y(t)$.

5.178. $x^2y''-4xy'+6y$, $\quad x=e^t$, $y=y(t)$.

5.179. $(xu')'+u^nx^\sigma$, $\quad t=\ln x$, $u=u(t)$.

✓**5.180.** $(x^2-1)u''+2xu'-\dfrac{m^2}{x^2-1}u$, $\quad x=\operatorname{ch}t$, $u=u(t)$.

◇**5.181.** $(1+x^2)y''-y$, $\quad y=\dfrac{u}{\cos t}$, $x=\operatorname{tg}t$, $u=u(t)$.

✓**5.182.** $u''+\dfrac{\mu}{x^2}u$, $\quad u=\sqrt{x}z$, $x=e^t$, $z=z(t)$.

5.183. $u''-q(x)u$, $\quad u=\sqrt{x}v$, $t=\dfrac{1}{2}\ln x$, $v=v(t)$.

5.184. $(\sqrt{x}u')'-x^3\sqrt{x}u^5$, $\quad t=2\sqrt{x}$, $u=4v$, $v=v(t)$.

✓**5.185.** $(x^3u')'+x^3u^2$, $\quad t=\dfrac{1}{2}x^2$, $u=\dfrac{2v}{t}$, $v=v(t)$.

5.186. $y''+2y(y')^2$, $x=x(y)$.

◇**5.187.** $2y''+(x+y)(1-y')^3$, $\quad x=v+t$, $y=v-t$, $v=v(t)$.

5.188. $y'-\dfrac{x-y}{x+y}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=r(\varphi)$.

✓**5.189.** $(x^2+y^2)^2y''-2(xy'-y)(yy'+x)^2$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=r(\varphi)$.

◊**5.190.** Уравнение $x^3+y^3-y^5-x=0$ определяет функцию $y=y(x)$. Найти $y'(1)$, если $y(1)=1$.

Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функции, заданной неявно (5.191–5.197).

√**5.191.** $x+y=e^{x-y}$. **5.192.** $x^2-1+\cos xy=0$. **5.193.** $x^3+4y^3-3yx^2=2$.

√**5.194.** $x^2+2xy+y^2-4x+2y=2$ в точке $x=1$.

5.195. $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$ в точке $x=\dfrac{a}{2}$.

◊**5.196.** $\ln(x^2+y^2)=x-y$ при $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5.197. $x\cos\pi y-y\sin\pi x=x-1$ при $x=y=\dfrac{1}{2}$.

◊**5.198.** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle\alpha;\beta\rangle$ и $f'(a)\cdot f'(b)<0$, где $\alpha<a<b<\beta$. Доказать, что существует такая точка $c\in(a;b)$, что $f'(c)=0$.

√**5.199.** Пусть функция $f(x)$ является производной некоторой функции на интервале $(a;b)$ и $[a_1;b_1]\subset(a;b)$. Доказать, что тогда для любого числа μ, лежащего между $f(a_1)$ и $f(b_1)$, найдётся такая точка $c\in[a_1;b_1]$, что $f(c)=\mu$ (*свойство Дарбу* производной).

√**5.200.** Пусть функция f дифференцируема на $(a;b)$. Доказать, что функция f' не может иметь разрывов первого рода на $(a;b)$.

√**5.201.** Существует ли такая функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f'(x)=\operatorname{sgn}x$ при всех $x\in\mathbb{R}$?

√**5.202.** Проверить, применима ли теорема Ролля для следующих функций на $[-1;1]$: а) $f(x)=|x|$; б) $f(x)=x$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. В случае неприменимости указать, какое из условий теоремы не выполняется.

5.203. Пусть функция $f\in C[a;b]$ дифференцируема на $(a;b)$, причём $f(a)=f(b)=0$. Доказать, что для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ найдётся такое число $x\in(a;b)$, что $\lambda f(x)+f'(x)=0$.

◊**5.204.** Пусть функция $f\in C[a;b]$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$. Доказать, что уравнение $f(x)f'(x)=x$ имеет хотя бы один корень на $(a;b)$.

5.205. Пусть функции $f,g\in C[a;b]$ дифференцируемы на $(a;b)$, нигде не обращаются в нуль на $[a;b]$ и $f(a)g(b)=f(b)g(a)$. Доказать, что существует такая точка $x\in(a;b)$, что $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

5.206. Пусть функция $f\in C[0;2]$ дважды дифференцируема на $(0;2)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f(2)=2$. Доказать, что существует такая точка $x\in(0;2)$, что $f''(x)=0$.

5.207. Пусть функция $f\in C^1[a;b]$ дважды дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a)=f(b)=f'(a)=0$. Доказать, что существует такая точка $x\in(a;b)$, что $f''(x)=0$.

5.208. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{n+1-k}=0$. Доказать, что многочлен $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$ имеет хотя бы один корень на интервале $(0;1)$.

√**5.209.** Доказать, что если многочлен $P(x)$ степени n имеет n действительных корней, то все многочлены $P^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ также имеют только действительные корни.

5.223. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$, дифференцируема на $(0; 1)$, $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f'(x)\geqslant -2$. Доказать, что $f(x)$ — линейная функция.

5.224. Пусть функция $f\in C[a; b]$ дифференцируема на $(a; b)$ и не является линейной. Доказать, что существуют такие точки $x, y\in(a; b)$, что $f'(x)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(y)$.

5.225. Пусть функция $f(x)\in C^1[0; +\infty)$, $f(0)=1$ и $|f(x)|\leqslant e^{-x}$ при $x\geqslant 0$. Доказать, что существует такая точка $c>0$, что $f'(c)=-e^{-c}$.

Применяя теорему Лагранжа, доказать неравенства (5.226—5.230).

◊**5.226.** $|\sin a-\sin b|\leqslant|a-b|$, $a, b\in\mathbb{R}$.

√**5.227.** $\ln\dfrac{1+a^2}{1+b^2}\leqslant|a-b|$, $a, b\in\mathbb{R}$. **5.228.** $\ln\dfrac{1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\leqslant\dfrac{1}{4}|a-b|$, $a, b\geqslant 1$.

5.229. $\sqrt{3}|\arcsin(\operatorname{tg} a)-\arcsin(\operatorname{tg} b)|\leqslant 2\sqrt{2}|a-b|$, $a, b\in\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

√**5.230.** $\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}<\dfrac{1}{(x-1)^\alpha}-\dfrac{1}{x^\alpha}$, $x>1$, $\alpha>0$.

√**5.231.** Доказать, что функция f, имеющая ограниченную производную на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a; b\rangle$, равномерно непрерывна на $\langle a; b\rangle$. Верно ли обратное утверждение для дифференцируемой функции f?

5.232. Пусть f на интервале $(a; b)$ имеет ограниченную вторую производную. Доказать, что f равномерно непрерывна на $(a; b)$.

5.233. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, если
а) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$; б) $f(x)=x\sin(\ln|x|)$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$.

5.234. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x\geqslant x_0$ и $|f'(x)|\leqslant g'(x)$. Доказать, что $|f(x)-f(x_0)|\leqslant g(x)-g(x_0)$ для любого $x\geqslant x_0$.

5.235. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1; x_2]$ и $x_1>0$. Доказать, что существует такая точка $c\in(x_1; x_2)$, что

5.163. $x'(y) = \dfrac{x(y)}{1+2x^2(y)}$. **5.164.** $x'(y) = \dfrac{1}{1+y-x(y)}$. **5.165.** $x'(y) = \dfrac{1}{1-a\cos x(y)}$.
5.166. Нет, поскольку множество определения обратной функции не содержит внутренних точек. **5.167.** $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$, $y'' = -\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$, $y''' = \dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}$.
5.168. $\dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$. **5.169.** $\dfrac{\sin t}{a\cos^4 t}$. **5.170.** $\dfrac{1-2t\operatorname{arctg} t}{9(1+t^2)^3}$. **5.171.** $\dfrac{\cos t - 3\sin t}{4e^{2t}\cos^5 t}$.
5.172. $-\dfrac{3}{16a^2}\cdot\dfrac{\cos 2t}{\cos^5\dfrac{t}{2}\sin^3\dfrac{3t}{2}}$. **5.173.** $\dfrac{3(at+b)\sin t - a\cos t}{(at+b)^3\cos^5 t}$. **5.174.** $-\dfrac{3}{25a^2}\cdot\dfrac{1+7\sin^2 t}{\cos^{13} t\cdot\sin t}$.
5.175. $\dfrac{t+2t\cos^2 t+\dfrac{1}{2}\sin 2t}{4t^3\sin^4 t}$. **5.176.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(u''+\left(1-\dfrac{\mu^2-1/4}{x^2}\right)u\right)$. **5.177.** $\dot{y}\cos t - y\sin t$.
5.178. $\ddot{y}-5\dot{y}+6y$. **5.179.** $e^{-t}\ddot{u}+e^{\sigma t}u^n$. **5.180.** $\ddot{u}+\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\dot{u}-\dfrac{m^2}{\operatorname{sh}^2 t}u$.
5.181. $\dfrac{\ddot{u}\cos^2 t - u\sin^2 t}{\cos t}$. **5.182.** $e^{-3t/2}\left(\ddot{z}+\left(\mu-\dfrac{1}{4}\right)z\right)$.
5.183. $\dfrac{1}{4}e^{-3t}\left(\ddot{v}-\left(1+4e^{4t}q(e^{2t})\right)v\right)$. **5.184.** $\dfrac{8}{t}\left(\ddot{v}-t^8v^5\right)$. **5.185.** $8\sqrt{2}t^{3/2}\left(\ddot{v}+\dfrac{v^2}{t^2}\right)$.
5.186. $\dfrac{-x''+2x'y}{(x')^3}$. **5.187.** $\dfrac{4\ddot{v}+16v}{(\dot{v}+1)^3}$. **5.188.** $\dfrac{r'(\sin 2\varphi-\cos 2\varphi)+r(\sin 2\varphi+\cos 2\varphi)}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)(\cos\varphi+\sin\varphi)}$.
5.189. $\dfrac{-r^5(r''-r)}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3}$. **5.190.** 1. **5.191.** $y' = -\dfrac{1-x-y}{1+x+y}$, $y'' = \dfrac{4x+4y}{(1+x+y)^3}$.
5.192. $y' = \dfrac{2}{\sin xy}-\dfrac{y}{x}$, $y'' = \dfrac{2y}{x^2}-\dfrac{2}{x\sin xy}-\dfrac{4x\cos xy}{\sin^3 xy}$.
5.193. $y' = \dfrac{x}{x+2y}$, $y'' = \dfrac{2xy+4y^2-2x^2}{(x+2y)^3}$.
5.194. $y'=-2$, $y''=\dfrac{1}{3}$ при $x=1$, $y=-5$; $y'=0$, $y''=-\dfrac{1}{3}$ при $x=1$, $y=1$.
5.195. $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$, $y'' = \dfrac{-8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$;
$y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, $y'' = \dfrac{8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\dfrac{a}{2}$, $y=-\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.
5.196. $y'=2\sqrt{2}-3$, $y''=4(7-5\sqrt{2})$. **5.197.** $y'=-\dfrac{2}{\pi+2}$, $y''=\dfrac{\pi^3+2\pi^2+8\pi}{(\pi+2)^2}$.
5.199. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x)-\mu x$ и воспользоваться задачей 5.198.
5.200. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
5.201. Нет. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
5.202. а), в) Нет, так как нет дифференцируемости в точке $x=0$; б) нет, $f(1)\neq f(-1)$.
5.203. *Указание.* Применить теорему Ролля к функции $g(x)=e^{\lambda x}f(x)$.
5.207. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x)-x$ и применить к ней теорему Ролля.
5.209. *Указание.* Применить теорему Ролля.
5.212. *Указание.* При фиксированном $x\neq x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, рассмотреть функцию

$$\varphi(t) = f(t) - L_{n-1}(t) - \frac{f(x)-L_{n-1}(x)}{\omega_n(x)}\omega_n(t).$$

5.214. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
5.215. *Указание.* Воспользоваться теоремой Лагранжа.
5.216. *Указание.* Показать, что функция $g(x)=f(x)-Ax$ постоянна.
5.217. *Указание.* Показать, что $f'(x)=0$ при всех $x\in[a;b]$.
5.219. *Указание.* Рассмотреть функцию $g(x)=f(x)e^{-\lambda x}$.
5.220. Нет. Пусть $f(x)=x^3$; $(a;b)=(-1;1)$, $c=0$. Для любой пары $x_1\in(-1;0)$, $x_2\in(0;1)$ имеем $f'(0)=0$, но $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$.

5.221. Например, $f(x)=x^2(x-1)^2$.

5.222. *Указание.* а) Рассмотреть функцию $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ где $\alpha\in(1;2]$.

б) Применить теорему Лагранжа.

в) Показать, что $\dfrac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}=\dfrac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}\gamma_n+\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}(1-\gamma_n)$, где $0<\gamma_n<1$.

5.223. *Указание.* Рассмотреть функцию $g(x)=f(x)+2x-4$.

5.224. *Указание.* Поскольку функция f не линейная, найдётся такое число $c\in(a;b)$, что $f(c)\neq f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$.

5.225. *Указание.* Рассмотреть функцию $g(x)=f(x)-e^{-x}$.

5.231. *Указание.* Применить теорему Лагранжа. Обратное утверждение неверно: рассмотреть $f(x)=\sqrt{x}$ на $(0;1)$.

5.234. *Указание.* Если $g(x)-g(x_0)\neq 0$, то применить теорему Коши. Если $g(x)-g(x_0)=0$, то показать, что $f(x)-f(x_0)=0$.

5.235. *Указание.* Применить теорему Коши к функциям $u=\dfrac{f(x)}{x}$ и $v=\dfrac{1}{x}$ на $[x_1;x_2]$.

5.236. а) $y=x$, $y=-x$; б) $y+2=2(1+\ln 2)(x+1)$, $y+2=-\dfrac{1}{2(1+\ln 2)}(x+1)$.

5.237. а) $y=\pi x$, $y=-\dfrac{1}{\pi}x$; б) $y=-\dfrac{\pi}{2}(x-1)$, $y=\dfrac{2}{\pi}(x-1)$.

5.238. а) $y-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{3}(x-1)$, $y-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{3}{\pi+\sqrt{3}}(x-1)$;

б) $y-\pi=\dfrac{2\sqrt{3}\pi+9}{3}(x-\sqrt{3})$, $y-\pi=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}\pi+9}(x-\sqrt{3})$.

5.239. а) $y-\dfrac{1}{64}=\dfrac{6-\pi}{32}\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$, $y-\dfrac{1}{64}=\dfrac{32}{\pi-6}\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$; б) $y=-\dfrac{\pi}{8}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, $y=\dfrac{8}{\pi}\left(x-\dfrac{1}{12}\right)$.

5.240. а) $y=x$, $y=-x$; б) $y=\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$, $x=\dfrac{3}{4}$; в) $x=1$, $y=0$.

5.241. а) Полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$;

б) $y-\dfrac{\sqrt[3]{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{49}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y-\dfrac{\sqrt[3]{7}}{2}=-\dfrac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

5.242. а) $y=-x+3$, $y=x+1$; б) $x=-3$, $y=0$; в) $y=x-3$, $y=-x-1$.

5.243. а) Полукасательная $y+1=-\dfrac{1}{3}(x-2)$, $x\leqslant 2$; б) $y=-\dfrac{2}{3}x$, $y=\dfrac{3}{2}x$;

в) $y-(3+2\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}x$, $y-(3+2\sqrt{3})=-\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}x$.

5.244. а) $y+2=0$, $x+3=0$;

б) $y+4-2\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})(x+1)$, $y+4-2\sqrt{2}=-\dfrac{2}{3(2-\sqrt{2})}(x+1)$;

в) полукасательная $y-2=3(x-1)$, $x\leqslant 1$, $y-2=-\dfrac{1}{3}(x-1)$.

5.245. а) $y-1=-x$, $y-1=x$; б) $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$; в) $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$.

5.246. а) $y=\dfrac{2}{\pi^3}x$, $y=-\dfrac{\pi^3}{2}x$; б) $y+\dfrac{\pi}{4}-1=\dfrac{1}{4\pi}(x-\pi)$, $y+\dfrac{\pi}{4}-1=-4\pi(x-\pi)$;

в) $x=2\pi$, $y=2-\operatorname{arctg} 2$.

5.247. а) $y=x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y=-x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и $y=x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y=-x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}$; б) $x=a$, $y=0$.

5.248. $y=3$, $x=1$ в точке $(1,3)$;

$y+2=\dfrac{1}{2}(x-1)$, $y+2=-2(x-1)$ в точке $(1,-2)$.