

## Задачи

◇ 5.1. Доказать, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  представима в виде  $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$ , где  $g$  — функция, непрерывная в точке  $x_0$ .

5.2. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ , а функция  $g(x)$  не дифференцируема в этой точке. Доказать, что функция  $f(x) \cdot g(x)$  не является дифференцируемой в точке  $x_0$ .

√ 5.3. Имеют ли производные в точке  $x = 0$  следующие функции:

- а)  $y = x|x|$ ; б)  $y = |x^3|$ ; в)  $y = x|x^3|$ ?

5.4. Привести пример двух недифференцируемых в точке  $x_0$  функций:

- а) сумма которых дифференцируема в точке  $x_0$ ;  
б) произведение которых дифференцируемо в точке  $x_0$ ;  
в) частное которых дифференцируемо в точке  $x_0$ .

√ 5.5. Пусть в некоторой точке  $x$  существует  $f'(x)$ . Обязательно ли существует  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$ ?

√ 5.6. Следует ли дифференцируемость функции  $f$  в точке  $x$  из существования конечного предела: а)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ ; б)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ ?

√ 5.7. Привести пример функции, дифференцируемой в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 1$  и разрывной в остальных точках отрезка  $[-2; 2]$ .

5.8. Привести пример функции, дифференцируемой ровно а) в одной точке; б) в  $n$  точках; в) в счётном множестве точек.

Используя определение, найти производную функции  $f$  в заданной точке  $x_0$  (5.9–5.12).

√ 5.9°  $f(x) = x(x+1)^2(x-1)^3$ , а)  $x_0 = 0$ ; б)  $x_0 = 1$ ; в)  $x_0 = -1$ .

5.10.  $f(x) = x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ , а)  $x_0 = 0$ ; б)  $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ .

5.11.  $f(x) = (x-2)^2 \ln x$ , а)  $x_0 = 1$ ; б)  $x_0 = 2$ .

√ 5.12.  $f(x) = 3x + (x-1) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{x+2}}$ ,  $x_0 = 1$ .

√ 5.13. Найти  $f'(0)$ , если а)  $f(x) = |x|(1 - \cos x)$ ;

б)  $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin \frac{5}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  в)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{4}{3x} + \frac{x}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Используя определение, найти производную функции (5.14–5.22).

◇ 5.14°  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 5.15°  $f(x) = \frac{1}{x}$ . √ 5.16.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

√ 5.17.  $f(x) = \sin x$ . 5.18.  $f(x) = \cos x$ . 5.19.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

5.20.  $f(x) = \arcsin x$ . 5.21.  $f(x) = \arccos x$ . √ 5.22.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

√ 5.23. Пусть  $f(x)$  — дифференцируемая чётная (нечётная) функция. Доказать, что  $f'(x)$  — нечётная (чётная) функция.

5.24. Доказать, что если чётная функция  $f$  дифференцируема в нуле, то  $f'(0) = 0$ .

√ 5.25. Доказать, что производная периодической дифференцируемой функции является периодической функцией.

5.26. Доказать, что функция  $f(x) = \sin x + \cos \sqrt{2}x$  не периодическая.

5.27. Привести пример монотонной функции, производная которой не является монотонной функцией.

Найти производную функции, заданной следующей формулой (5.28–5.98)

- $\sqrt{5.28.} \frac{(x + \sqrt[3]{x})^2}{x^3}$       5.29.  $\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x}}$        $\diamond 5.30. \frac{4x^2 - 2x + 10}{\sqrt{x}}$
- $\sqrt{5.31.} (3x - 5)^6$       5.32.  $\sqrt[4]{(8x - 3)^3}$       5.33.  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1 - 2x)^3}}$
- $\sqrt{5.34.} \frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 4)^2}}$        $\sqrt{5.35.} x^2 \sqrt[3]{x^2 + 4x + 1}$       5.36.  $\frac{x}{(x^3 + 2)^3}$
- $\sqrt{5.37.} \frac{1}{(1 - x^4)^2}$        $\sqrt{5.38.} \frac{2 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$       5.39.  $\frac{1 - \sqrt[3]{1 + x}}{x\sqrt{1 - x}}$
- 5.40.  $\frac{1}{\sin^3 2x}$       5.41.  $\sin 3x \cdot \cos^2 3x$        $\sqrt{5.42.} \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
- $\diamond 5.43. x(\cos x - 4 \sin x)$       5.44.  $\frac{\sin 2x + 1}{\sin x - \cos x}$       5.45.  $\frac{x^2}{(x + \sin x)^3}$
- 5.46.  $e^{3x}(x + 3)$       5.47.  $e^{-x} \frac{x - 2}{(1 - x)^2}$       5.48.  $e^{-x}(\cos x + \sin x)$
- $\sqrt{5.49.} e^{2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x)$        $\diamond 5.50. \sqrt{\operatorname{tg}^3 2x + 2}$
- 5.51.  $x^2 2^x + x^3 3^x$       5.52.  $x \cdot 2^{1 - x^2}$       5.53.  $x^2 \sqrt{5 - x + 3}$
- $\sqrt{5.54.} 3^{\sin^2 \frac{x}{2}}$       5.55.  $4^{x \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$       5.56.  $2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg} 5x + 1}}$
- $\sqrt{5.57.} x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} (a > 0)$        $\sqrt{5.58.} x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- 5.59.  $\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$        $\sqrt{5.60.} \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x$
- 5.61.  $\ln \operatorname{ctg} \frac{2x + \pi}{4}$       5.62.  $x \operatorname{ctg} x - \ln \sin x$
- 5.63.  $\frac{1}{\cos^2 x} - \ln \operatorname{ctg}^2 x$       5.64.  $x + \ln(\cos x + \sin x)$
- 5.65.  $\log_2 \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$        $\sqrt{5.66.} x(\cos(2 \ln x) + 2 \sin(2 \ln x))$
- 5.67.  $2 \cos x \sqrt{\cos 2x} - \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} \cos x - \sqrt{\cos 2x})$
- 5.68.  $3^{\ln^2(1 + e^{-x})}$        $\diamond 5.69. \frac{\arcsin x}{1 - x^2}$        $\sqrt{5.70.} \left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$
- 5.71.  $x^2 \arccos 3x$       5.72.  $x^2 \operatorname{arctg} x$       5.73.  $2^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}}$
- $\sqrt{5.74.} x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$        $\sqrt{5.75.} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3$
- $\sqrt{5.76.} \arcsin \frac{x + 2}{2x + 2}$        $\sqrt{5.77.} \arccos \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$       5.78.  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}}$
- 5.79.  $\frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} - \arcsin 2x$       5.80.  $x \arcsin \sqrt{1 - 2x^3}$
- $\sqrt{5.81.} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$        $\diamond 5.82. \ln^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$       5.83.  $\operatorname{arctg}(\cos^2 x)$
- $\diamond 5.84. x^x$        $\sqrt{5.85.} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$        $\sqrt{5.86.} (e^x + e^{-x})^{\cos 2x}$
- 5.87.  $\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x - e^{-x}}}$       5.88.  $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$       5.89.  $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{x \arcsin 2x}$
- $\diamond 5.90. (\operatorname{arctg} x)^x$       5.91.  $(\operatorname{arctg} 4x)^{\sqrt[3]{1 + x^2}}$
- $\diamond 5.92. \frac{\sqrt[7]{(x + 3)^5}}{(x - 2)^6(2x + 9)^3}$       5.93.  $\frac{x^3}{x + 1} \sqrt[5]{\frac{x - 1}{(x + 2)^3}}$        $\sqrt{5.94.} \frac{x^x \sqrt[7]{(2x - 1)^2}}{(x + 3)^4(x - 5)^3}$
- $\sqrt{5.95.} \arcsin(\sin x)$       5.96.  $\operatorname{arctg} \frac{x + 4}{x - 4}$        $\sqrt{5.97.} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2 - 1}$
- $\diamond 5.98. x \sqrt{(1 - x)^2 \sin x^2}, |x| < \sqrt{\pi}$

- 5.531.  $z^2 y = (a-x)(8a+x)^2$  (кубика Чирнгауза).  
 ✓ 5.532.  $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$  (кардиоида).  
 5.533.  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  (лемниската Бернулли).

### Ответы и указания

- 5.3. а)–в) Да. 5.4. Например, а)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = 1 - |x|$ ,  $x_0 = 0$ ;  
 б)  $f(x) = g(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ ; в)  $f(x) = g(x) = |x| + 1$ ,  $x_0 = 0$ .  
 5.5. Да, и равен  $2f'(x)$ . 5.6. Нет, например, а)  $f(x) = \operatorname{sgn}^2(x)$ ; б)  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ .  
 5.7. Например,  $f(x) = x^2(x^2 - 1)^2 D(x)$ ,  $D(x)$  – функция Дирихле.  
 5.8. а)  $x^2 D(x)$ ; б)  $(x-1)^2 \dots (x-n)^2 D(x)$ ; в) функция из предыдущей задачи.  
 5.9. а)  $-1$ ; б)  $0$ ; в)  $0$ . 5.10. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $-\frac{5\pi}{6}$ . 5.11. а)  $1$ ; б)  $0$ . 5.12.  $3 + \frac{\pi}{6}$ .  
 5.13. а)  $0$ ; б)  $0$ ; в)  $\frac{1}{2}$ . 5.14.  $nx^{n-1}$ . 5.15.  $-\frac{1}{x^2}$ . 5.16.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ . 5.17.  $\cos x$ .  
 5.18.  $-\sin x$ . 5.19.  $-\frac{1}{\sin^2 x}$ . 5.20.  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . 5.21.  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . 5.22.  $\frac{1}{1+x^2}$ .  
 5.26. Указание. Если предположить противное, то согласно предыдущей задаче функция  $f''(x)$  будет иметь такой же период, что и  $f(x)$ . Тогда и любая линейная комбинация этих функций будет иметь тот же период, но среди этих комбинаций есть функции  $\sin x$  и  $\cos \sqrt{2}x$ , которые не имеют общего периода.  
 5.27. Например,  $f(x) = x - \sin x$ .  
 5.28.  $-\frac{3x\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[3]{x^2} + 7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$ . 5.29.  $\frac{5x^2 + 2x - 1}{3x\sqrt[3]{x}}$ . 5.30.  $\frac{6x^2 - x - 5}{x\sqrt{x}}$ . 5.31.  $18(3x - 5)^5$ .  
 5.32.  $\frac{6}{\sqrt[4]{8x-3}}$ . 5.33.  $-\frac{3}{4\sqrt[8]{(1-2x)^5}}$ . 5.34.  $\frac{-2}{\sqrt[3]{(3x+4)^5}}$ . 5.35.  $\frac{8x^3 + 28x^2 + 6x}{3\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^2}}$ .  
 5.36.  $\frac{2-8x^3}{(x^3+2)^4}$ . 5.37.  $\frac{3x^2+5x^6}{(1-x^4)^3}$ . 5.38.  $\frac{x^3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .

- 5.39.  $\frac{6-5x-7x^2+3(3x-2)(1+x)^{2/3}}{6x^2(1-x)^{3/2}(1+x)^{2/3}}$ . 5.40.  $\frac{-6\cos 2x}{\sin^4 2x}$ . 5.41.  $\frac{3}{2}\cos 3x(3\cos 6x-1)$ .
- 5.42.  $\frac{2-\cos 2x}{\cos^4 x}$ . 5.43.  $(1-4x)\cos x - (4+x)\sin x$ . 5.44.  $\frac{(\cos x + \sin x)(\sin 2x - 1)}{1 - \sin 2x}$ .
- 5.45.  $\frac{2x \sin x - 3x^2 \cos x - x^2}{(x + \sin x)^4}$ . 5.46.  $e^{3x}(3x+10)$ . 5.47.  $e^{-x} \frac{x^2 - 2x - 1}{(1-x)^3}$ .
- 5.48.  $-2e^{-x} \sin x$ . 5.49.  $-13e^{2x} \sin 3x$ . 5.50.  $\frac{3 \operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x \sqrt{\operatorname{tg}^3 2x + 2}}$ .
- 5.51.  $x^2(2^x \ln 2 + x3^x \ln 3) + x(2^{x+1} + x3^{x+1})$ . 5.52.  $2^{1-x^2}(1-x^2 \ln 4)$ .
- 5.53.  $\frac{12x + x5^{-x}(4-x \ln 5)}{2\sqrt{5^{-x}+3}}$ . 5.54.  $\frac{\ln 3}{2} \sin x \cdot 3^{\sin^2 \frac{x}{2}}$ .
- 5.55.  $4^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \ln 4 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}\right)$ . 5.56.  $2^{\sqrt{\operatorname{tg} 5x+1}} \cdot \frac{\ln 2}{(\operatorname{tg} 5x+1)^{4/5}} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x}$ .
- 5.57.  $a^x x^{a^x-1} + a^{x^a+1} x^{a-1} \ln a + a^{a^x+x} \ln^2 a$ . 5.58.  $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ .
- 5.59.  $\frac{\sqrt{1+x^2} - x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ . 5.60.  $\frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x}$ . 5.61.  $-\frac{1}{\cos x}$ . 5.62.  $-\frac{x}{\sin^2 x}$ .
- 5.63.  $\frac{2}{\sin x \cdot \cos^3 x}$ . 5.64.  $\frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x}$ . 5.65.  $\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{-2x^2}{(1-x^2) \sin 2x - 2x \cos 2x}$ .
- 5.66.  $5 \cos(2 \ln x)$ . 5.67.  $-4 \sin x \sqrt{\cos 2x}$ . 5.68.  $-3^{\ln^2(1+e^{-x})} \cdot \frac{2 \ln 3 \ln(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} e^{-x}$ .
- 5.69.  $\frac{\sqrt{1-x^2} + 2x \arcsin x}{(1-x^2)^2}$ . 5.70.  $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2} \cdot \ln \frac{1}{3} \cdot 2x}{\sqrt{1-x^4}}$ . 5.71.  $2x \arccos 3x - \frac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$ .
- 5.72.  $2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}$ . 5.73.  $2^{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}} \ln 2 \cdot \frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ . 5.74.  $\arccos x$ .
- 5.75.  $\frac{x^4+1}{x^6+1}$ . 5.76.  $-\frac{1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$ . 5.77.  $\frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$ . 5.78.  $-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ .
- 5.79.  $\frac{8x^2}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$ . 5.80.  $\arcsin \sqrt{1-2x^3} - \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2-4x^3}}$ . 5.81.  $\frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2 x}$ .
- 5.82.  $-\frac{9 \ln^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^3}}}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^3}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$ . 5.83.  $\frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}$ . 5.84.  $x^x(\ln x + 1)$ .
- 5.85.  $(1+x)^{\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2}$ .
- 5.86.  $(e^x + e^{-x})^{\cos 2x} (-2 \sin 2x \cdot \ln(e^x + e^{-x}) + \cos 2x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}})$ .
- 5.87.  $\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x - e^{-x}}} \left(\frac{1}{3}(e^x - e^{-x})^{-2/3}(e^x + e^{-x}) \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2x}{3}} \cdot \sqrt[3]{e^x - e^{-x}}\right)$ .
- 5.88.  $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \ln \arcsin x + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ .
- 5.89.  $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{x \arcsin 2x} \left(\arcsin 2x \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{x \arcsin 2x}{\sin x}\right)$ .
- 5.90.  $(\operatorname{arctg} x)^x \left(\ln \operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}\right)$ .
- 5.91.  $(\operatorname{arctg} 4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}} \left(\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-2/3} \cdot \ln \operatorname{arctg} 4x + \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\operatorname{arctg} 4x} \cdot \frac{4}{1+16x^2}\right)$ .
- 5.92.  $\frac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3} \left(\frac{5}{7(x+3)} - \frac{6}{x-2} - \frac{6}{2x+9}\right)$ .
- 5.93.  $\frac{x^3}{x+1} \sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+2)^3}} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{5(x-1)} - \frac{3}{5(x+2)}\right)$ .