

Используя подходящую замену переменной, найти предел (4.244–4.249) ($m, n \in \mathbb{N}$).

$$\begin{array}{ll}
 4.244. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}. & \diamond 4.245. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}. \\
 \sqrt{4.246. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{\sqrt[3]{x} - 1} \right)}. & 4.247. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[7]{x} - 1}. \\
 4.248. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + 1}{1 - 2\sqrt{x} + x}. & \sqrt{4.249. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x}}.
 \end{array}$$

Найти предел, пользуясь значением первого замечательного предела (4.250–4.271).

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt{4.250^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}. & 4.251^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}. & \sqrt{4.252^\circ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x}. \\
 \sqrt{4.253. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}}. & 4.254^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}. & \\
 4.255. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{2x}. & 4.256^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin^2 3x}{\ln \sin^2 7x}. & \\
 \diamond 4.257^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. & 4.258^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{x^2}. & \\
 \sqrt{4.259^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}. & \sqrt{4.260^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x. & 4.261^\circ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}. \\
 \diamond 4.262^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}. & 4.263^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}. & \sqrt{4.264^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}. \\
 \sqrt{4.265. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}}. & 4.266. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}. & 4.267. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}. \\
 4.268^* \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1}. & 4.269^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}. & \\
 \sqrt{4.270. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)}. & 4.271. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\pi - \operatorname{arctg} x). &
 \end{array}$$

$\diamond 4.272$. Пользуясь равенством $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$, $x \in \mathbb{R}$ (см. задачу 3.243), вывести второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Найти предел, пользуясь значением второго замечательного предела (4.273–4.293) ($a > 0$).

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{4.273^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}. & \sqrt{4.274^\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \\
 4.275^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^3} - 1}{x^3}. & 4.276^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1). \quad \sqrt{4.277^\circ} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1). \\
 \sqrt{4.278. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1}}{\arcsin x}}; & \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1}}{\arcsin x}. \\
 \sqrt{4.279. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)})}. & 4.280^* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{(x-4)e^x + xe^2}. \\
 \diamond 4.281^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}. & 4.282^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}. \quad 4.283^\circ \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cth} x. \\
 \sqrt{4.284. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}}. & 4.285. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \operatorname{ch} x}{x^2}. \\
 \diamond 4.286^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. & 4.287^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}, \quad a \neq 1. \\
 4.288. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+2) - \ln x). & 4.289. \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_2 \frac{8+x}{4+x}.
 \end{array}$$

$$\sqrt{4.290.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad \diamond 4.291. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

$$4.292. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}. \quad 4.293^* \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x-a}.$$

$\sqrt{4.294.}$ Пусть $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x) = 1$. Доказать, что

а) если $\lim_{x \rightarrow \omega} v(x)(u(x) - 1) = l$, то $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x)^{v(x)} = e^l$;

б) если $\lim_{x \rightarrow \omega} v(x)(u(x) - 1) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x)^{v(x)} = +\infty$;

в) если $\lim_{x \rightarrow \omega} v(x)(u(x) - 1) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow \omega} u(x)^{v(x)} = 0$.

Раскрыть неопределённость вида 1^∞ (4.295–4.311).

$$\diamond 4.295^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad \sqrt{4.296^\circ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

$$4.297^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}. \quad 4.298. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$4.299^\circ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$4.300^\circ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^2)^{\sin^{-2} x}.$$

$$4.301^\circ \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$\sqrt{4.302.} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{-x})^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.303. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

$$4.304. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

$$\sqrt{4.305.} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$4.306. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$\diamond 4.307. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a, b > 0).$$

$$4.308. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n^2} \quad (a, b > 0).$$

$$4.309. \lim_{x \rightarrow 0} (2^x + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.310. \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$\sqrt{4.311.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (\alpha_i > 0).$$

4.312. Доказать равенства при $x \rightarrow 0$:

а) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$;

$\sqrt{б) } c \cdot o(x) = o(x)$, если c — постоянная;

\diamond в) $o(x^2) + o(x) = o(x)$;

г) $o(x^2 + o(x^2)) = o(x^2)$;

$\sqrt{д) } o(x) + x^2 = o(x)$;

$\sqrt{е) } (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$;

ж) $(x + o(x)) \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$;

з) $\sqrt{x^2 + o(x^2)} = |x| + o(x)$;

и) $e^{x+o(x)} = 1 + x + o(x)$.

$\sqrt{4.313.}$ Верно ли, что при $x \rightarrow 0$ справедливы равенства:

а) $o(1) + o(1) = o(1)$;

б) $o(1) - o(1) = 0$;

в) $O(x^3) = o(x^3)$;

г) $e^{O(1)} = O(1)$;

д) $(x + x^2 + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^2)$;

е) $(x + x^2 + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3)$?

$\sqrt{4.314.}$ Пусть $m < n$ и $x \rightarrow 0$. Доказать, что

а) $x^n = o(x^m)$;

б) $O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$;

в) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

$\sqrt{4.315.}$ Пусть $\alpha < \beta$ и $x \rightarrow +\infty$. Доказать, что

а) $x^\alpha = o(x^\beta)$;

б) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta)$;

в) $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\beta)$.

В задачах (4.316–4.330) все функции определены в некоторой проколотой

окрестности точки ω и все соотношения понимаются при $x \rightarrow \omega$.

$\sqrt{4.316^\circ}$ Пусть $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = l \neq 0$. Доказать, что $f(x) \sim l$.

4.317 $^\circ$ Пусть $f(x) \sim g(x)$. Доказать, что $f(x) = O(g(x))$

- 4.318° Доказать, что $o(f(x)) = O(f(x))$.
- ✓ 4.319° Пусть $f(x) \sim g(x)$. Доказать, что $o(f(x)) = o(g(x))$.
- ◇ 4.320° Доказать, что $f(x) \sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + o(g(x))$.
- ✓ 4.321° Доказать, что $o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x))$.
- ✓ 4.322° Если $C \neq 0$, то $O(Cf(x)) = O(f(x))$, $o(Cf(x)) = o(f(x))$.
- 4.323. Доказать равенства:
 а) $O(O(f(x))) = O(f(x))$, б) $o(O(f(x))) = o(f(x))$, в) $o(o(f(x))) = o(f(x))$.
- ✓ 4.324. Доказать равенства:
 а) $f(x) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$, б) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$.
- 4.325. Доказать равенства: а) $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x))$,
 б) $O(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$, в) $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$.
- ✓ 4.326. Доказать равенства: а) $O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$,
 б) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$, в) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.
- 4.327° Доказать, что отношение $f(x) \sim g(x)$ является отношением эквивалентности, т. е. а) $f(x) \sim f(x)$ (рефлексивность);
 б) если $f(x) \sim g(x)$, то $g(x) \sim f(x)$ (симметричность);
 в) если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) \sim h(x)$ (транзитивность).
- ✓ 4.328. Пусть $f(x) \sim g(x)$ и $h(x) \sim k(x)$. Верно ли, что:
 а) $f(x) + h(x) \sim g(x) + k(x)$; б) $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$?
- ✓ 4.329. Пусть $f(x) \sim g(x)$. Верно ли, что $a^{f(x)} \sim a^{g(x)}$ ($a > 0$)?
- ✓ 4.330. Пусть $f(x) \sim g(x)$, $f(x), g(x) > 0$, $h(x)$ — некоторая функция.
 а) Верно ли, что $(f(x))^{h(x)} \sim (g(x))^{h(x)}$?
 б) Верно ли утверждение п. а) при условии $-C \leq h(x) \leq C$, $C > 0$?
- ✓ 4.331. Показать, что при $x \rightarrow 0$
 а) $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(x)$ и $x = O\left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$; б) $x \cos \frac{1}{x} = O(x)$, но $x \neq O\left(x \cos \frac{1}{x}\right)$.
- 4.332. Показать, что при $x \rightarrow \infty$
 а) $\sqrt{x^2 + 4} \operatorname{arctg} x = O(x)$ и $x = O(\sqrt{x^2 + 4} \operatorname{arctg} x)$;
 б) $\ln(x^2 + 2^x) = O(x)$, но $x \neq O(\ln(x^2 + 2^x))$.

Найти главную часть вида Cx^α функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (4.333–4.342).

- ◇ 4.333° $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$, $\alpha_0 \neq 0$.
- ✓ 4.334° $f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$, $a_0 b_0 \neq 0$.
- ✓ 4.335° $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.
- ✓ 4.336. $f(x) = (x - \sqrt{x^2 - 1})^\alpha + (x + \sqrt{x^2 - 1})^\alpha$ ($\alpha > 0$).
- ✓ 4.337. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$; 4.338. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(-x)$;
- ✓ 4.339. $f(x) = \ln(x^2 + 4 + 4^{x^2})$; 4.340. $f(x) = (x^2 + 2) \ln(x + 2) - x^2 \ln x$;
- 4.341. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$; 4.342. $f(x) = \arcsin \frac{4x+1}{x^2+10x}$.

Найти главную часть вида Cx^α функции $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ (4.343–4.354).

- 4.343° $f(x) = (1 + mx)^n - (1 + nx)^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) \neq (1, 1)$.
- ◇ 4.344° $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-m} x^m$, $\alpha_{n-m} \neq 0$.
- ✓ 4.345° $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ($x \rightarrow 0+$).

- 4.228. 0. 4.229. 1. 4.230. $-\sqrt{2}$. 4.231. $-2\sqrt{2}$. 4.232. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4.233. $-\frac{3}{4}$.
- 4.234. $\frac{1}{5}$. 4.235. $\frac{2}{7}$. 4.236. 1. 4.237. $\begin{cases} +\infty, & n < m, \\ \ln \frac{a}{b}, & n = m, \\ -\infty, & n > m. \end{cases}$ 4.238. $\begin{cases} -\infty, & n < m, \\ \ln \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ +\infty, & n > m. \end{cases}$
- 4.241. а), б) Нет. Указание. Рассмотреть $f(y) = \operatorname{sgn} y$. в), г) Да. 4.244. 3.
- 4.245. $\frac{3}{4}$. 4.246. $-\frac{1}{2}$. 4.247. $\frac{m}{n}$. 4.248. $\frac{1}{6}$. 4.249. $\frac{1}{n}$. 4.250. $\frac{\pi}{2}$. 4.251. $\frac{4}{5}$.
- 4.252. $-\frac{1}{4}$. 4.253. $-\frac{1}{4}$. 4.254. π . 4.255. $\frac{1}{2}$. 4.256. 1. 4.257. $\frac{1}{2}$. 4.258. 24.
- 4.259. 1. 4.260. 1. 4.261. π . 4.262. 1. 4.263. $\frac{3}{2}$. 4.264. 1. 4.265. $\cos a$.
- 4.266. $-\sin a$. 4.267. $\frac{1}{\cos^2 a}$. 4.268. $-\frac{1}{2}$. 4.269. 3. 4.270. 1. 4.271. -1 .
- 4.273. $\ln a$. 4.274. $\ln \frac{\alpha}{\beta}$. 4.275. $\ln 5$. 4.276. 1. 4.277. $\ln a$. 4.278. а) 1; б) -1 .
- 4.279. 1. 4.280. ∞ . 4.281—4.283. 1. 4.284. $\frac{1}{2}$. 4.285, 4.286. 1. 4.287. $\frac{1}{\ln a}$.
- 4.288. 2. 4.289. $\frac{4}{\ln 2}$. 4.290. 2. 4.291. α . 4.292. $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$. 4.293. $a^a \ln \frac{a}{e}$.
- 4.295. e . 4.296. e^2 . 4.297. e . 4.298. 0. 4.299. \sqrt{e} . 4.300. e^3 . 4.301. e .
- 4.302. e . 4.303. e^2 . 4.304. \sqrt{e} . 4.305. $e^{-2/\pi}$. 4.306. e^π . 4.307. \sqrt{ab} .
- 4.308. $+\infty$. 4.309. $2e$. 4.310. $3e$. 4.311. $\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$. 4.313. а) Да, б), в) Нет, г), д) Да, е) Нет. 4.328. а) Нет, б) Да. 4.329. Нет. 4.330. а) Нет, б) Да.
- 4.333. $\alpha_0 x^n$. 4.334. $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$. 4.335. $x^{1/2}$. 4.336. $2^\alpha x^\alpha$. 4.337. x .
- 4.338. πx^2 . 4.339. $x^2 \ln 4$. 4.340. $2x$. 4.341. $\frac{1}{2x}$. 4.342. $\frac{4}{x}$.
- 4.343. $\frac{mn(n-m)}{2} x^2$. 4.344. $\alpha_{n-m} x^m$. 4.345. $x^{1/8}$. 4.346. $-\frac{5}{2} x^2$.
- 4.347. $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right) x$. 4.348. $-2x^{13/6}$. 4.349. $-\frac{\pi^2}{2} x^2$. 4.350. $x \ln \frac{a}{b}$. 4.351. ax .
- 4.352. $-7x^2$. 4.353. $x \ln 4$. 4.354. $\frac{1}{\pi x}$. 4.355. $10(x-1)$.
- 4.356. $\frac{n(n+1)}{2}(x-1)$. 4.357. $2\pi(x-1)^2$. 4.358. $\frac{(x-1)^2}{40}$.
- 4.359. $6(\ln 2 - \ln 3)(x-1)$. 4.360. $x-1$. 4.361. $-\frac{\pi^2}{8}(x-1)^2$.
- 4.362. $\frac{2}{\pi}(x-1)^{-1}$. 4.363. $-\frac{2}{\pi} \sqrt[3]{7}(x-1)^{-4/3}$. 4.364. $2(a-b)^{1/5}(x-1)^{-4/5}$.
- 4.365. $\sqrt{2}(1-x)^{1/2}$. 4.366. $\frac{a}{4n^2}$. 4.367. $-\frac{4\pi}{n^2}$. 4.368. $\frac{\pi k}{2n}$. 4.369. $\frac{1}{n} \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}$.
- 4.370. $-\frac{\pi}{4n}$. 4.371. $-\frac{\pi^2}{32n^2}$. 4.372. $\frac{1}{n^{3/2}}$. 4.373. $\frac{\ln 2}{n^2}$. 4.374. $\frac{1}{n}$.
- 4.375. $\frac{\ln 3}{n^{-1}}$. 4.376. -2 ; нельзя. 4.377. 4; нельзя. 4.378. 0; нельзя. 4.379. $\alpha^2 - \beta^2$.
- 4.380. $\frac{4}{3}$. 4.381. -1 . 4.382. $\frac{n(n+1)}{2}$. 4.383. $\frac{n(n+1)}{2}$.
- 4.384. $-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. 4.385. 1. 4.386. $\frac{3}{5}$. 4.387. $\frac{64}{3} \ln 2$. 4.388. $\frac{27 \ln 3}{256 \ln 2}$.
- 4.389. $\frac{1}{e}$. 4.390. $\frac{1}{e^{e+1}}$. 4.391. $\sqrt{2}$. 4.392. 1. 4.393. $\frac{40}{3}$. 4.394. $5(\alpha - \beta)$.
- 4.395. $\frac{5}{6}$. 4.396. а) $1 - \sqrt{2}$. б) $\sqrt{2} - 1$. 4.397. а) -2 . б) 0. 4.398. а) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. б) $-\infty$.
- 4.399. $-\frac{1}{4}$. 4.400. -25 . 4.401. $\frac{3}{7}$. 4.402. 2. 4.403. $4 - \pi$. 4.404. -12 .
- 4.405. $-2\sqrt{2}\pi^2$. 4.406. $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$. 4.407. $-\frac{3\pi^2}{2}$. 4.408. -2 . 4.409. 0.