

- 4.346.  $f(x) = \sqrt{1 - 2x - 4x^2} + x - 1$ . 4.347.  $f(x) = \sqrt[m]{1 + ax} \cdot \sqrt[n]{1 + bx} - 1$ .
- ◇ 4.348.  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}} \cdot \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$  ( $x \rightarrow 0+$ ).
- ✓ 4.349.  $f(x) = \ln \cos \pi x$ . 4.350.  $f(x) = a^x - b^x$ ,  $a \neq b$ .
- 4.351.  $f(x) = 1 + \sin ax - \cos ax$ . 4.352.  $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 1$ .
- ✓ 4.353.  $f(x) = \ln(x^2 + 4^x)$ . ✓ 4.354.  $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$ .
- Найти главную часть вида  $C(x-1)^\alpha$  функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow 1$  (4.355–4.364).
- ✓ 4.355<sup>o</sup>.  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 3$ . 4.356<sup>o</sup>.  $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n - n$ .
- 4.357.  $f(x) = (x^6 - 2x^2 + 1) \operatorname{tg} \pi x$ . ◇ 4.358.  $f(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1$ .
- 4.359.  $f(x) = 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x$ . ✓ 4.360.  $f(x) = x^x - 1$ .
- 4.361.  $f(x) = \ln \sin \frac{\pi x}{2}$ . 4.362.  $f(x) = \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{-1}$ .
- 4.363.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ . 4.364.  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^a - x^b}}{\arctg x - \pi/4}$  ( $a \neq b$ ).
- ✓ 4.365. Найти главную часть вида  $C(1-x)^\alpha$  функции  $f(x) = \arccos x$  при  $x \rightarrow 1-$ .

Найти главные части вида  $\frac{C}{n^\alpha}$  последовательности  $(a_n)$  (4.366–4.375).

- ✓ 4.366.  $a_n = \sqrt[4]{n^4 + an + b} - n$ . 4.367.  $a_n = \ln \frac{n+1}{n+5} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ .
- ◇ 4.368.  $a_n = |\sin(\pi\sqrt{n^2 + k})|$ ,  $k \neq 0$ .
- 4.369.  $a_n = a^{1/n} - \frac{1}{2}(b^{1/n} + c^{1/n})$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $a^2 \neq bc$ .
- 4.370.  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - 1$ . 4.371.  $a_n = \sin \frac{\pi n}{2n+1} - 1$ .
- ✓ 4.372.  $a_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ . 4.373.  $a_n = \sqrt[n]{2} - {}^{n+1}\sqrt{2}$ .
- 4.374.  $a_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ . 4.375.  $a_n = \ln(1 + 3^n)$ .
- ✓ 4.376. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x-x^2)}{x^2}$ . Можно ли для этого воспользоваться соотношениями  $\ln(1+x) \sim x$  и  $\ln(1-x-x^2) \sim -x-x^2$  при  $x \rightarrow 0$ ?
- ◇ 4.377. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x - \sin^2 2x}{x^4}$ . Можно ли для этого воспользоваться соотношениями  $2 - 2 \cos 2x \sim 4x^2$  и  $\sin^2 2x \sim 4x^2$  при  $x \rightarrow 0$ ?
- ✓ 4.378. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{2x^2 + x}$ . Можно ли для этого воспользоваться соотношением  $x^2 + x \sim x^2$  при  $x \rightarrow +\infty$ ?

Найти предел функции, используя табличные эквивалентности или соотношения с о-малым (4.379–4.442).

- ✓ 4.379.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha x - \sin^2 \beta x}{\operatorname{arctg}^2 x + x^3}$ . 4.380.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ .
- 4.381.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$ . 4.382.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}{\operatorname{arctg} x}$ .
- ✓ 4.383.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\sqrt{1+2x} - 1}$ . 4.384.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx - n}{\sin x^2}$ .
- 4.385.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(1 + xe^x)}$ . 4.386.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - x)}{\ln(x^4 + x^2 - x)}$ .
- ✓ 4.387.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 16}{\ln(x^2 - x - 1)}$ . 4.388.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 81}{2x^3 - 256}$ .

- 4.389.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{x - e}$ .      4.390.  $\lim_{x \rightarrow e^e} \frac{\ln \ln \ln x}{x - e^e}$ .       $\sqrt{4.391.} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$ .
- 4.392.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x}$ .      4.393.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[3]{1+5x} - \sqrt{1+6x}}{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[5]{1+2x}}$ .
- 4.394.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{\sqrt[5]{x} - 1}$ .      4.395.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 - 1})$ .
- $\sqrt{4.396.} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[4]{4x^4 + 1}}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[4]{4x^4 + 1}}{x}$ .
- 4.397. а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 2}}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 2}}{x}$ .
- 4.398. а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$ .
- $\diamond 4.399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x) - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$ .       $\diamond 4.400. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt[5]{1+x}}$ .
- 4.401.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x - \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \ln(1+7x)}$ .       $\sqrt{4.402.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x-x^2) + \arcsin 5x - 3x^3}{\sin 3x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^{10}}$ .
- 4.403.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + \cos \frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x} - 1}$ .      4.404.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2 + \sqrt[3]{1-x^2} - 1}$ .
- $\sqrt{4.405.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \cos \pi x}{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{4x}}$ .      4.406.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\ln \cos 2x} \quad (a > 0, b > 0)$ .
- 4.407.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x + \cos \pi x}{\ln(x^2 - 2x + 2)}$ .       $\sqrt{4.408.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{\arcsin^3 x}$ .
- 4.409.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{\cos \frac{\pi+x}{2}}$ .      4.410\*.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 2^x - 12}{2 \sin \frac{\pi}{3x} - 1}$ .
- 4.411.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1 + \sin 3x} - 1 + \operatorname{tg} x}{\arcsin x}$ .       $\sqrt{4.412.} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \cos \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x^3 + 2x}{1+x^3}} \right)$ .
- 4.413.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ .      4.414.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(a^x - a)^2}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 2}}$ .
- 4.415.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^\alpha}{\sin 2\pi x^\beta} \quad (\beta \neq 0)$ .       $\diamond 4.416. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x - \sqrt[7]{x})}$ .
- 4.417.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}}$ .      4.418.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$ .
- 4.419.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$ .       $\sqrt{4.420.} \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{\sqrt[3]{bx^2} - b} \quad (a > 0, b \neq 0)$ .
- 4.421.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m\sqrt{\cos \alpha x} - m\sqrt{\cos \beta x}}{\operatorname{arctg}^2 x}$ .      4.422.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\sin 2x} - 1}{x^3}$ .
- 4.423 $^\circ$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \operatorname{arctg} \frac{2}{x} \right)^x$ .      4.424 $^\circ$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$ .
- $\sqrt{4.425.} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x))^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$ .       $\diamond 4.426. \lim_{x \rightarrow 1} (\sin \pi x + x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ .
- 4.427.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin^2 \pi x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .       $\sqrt{4.428.} \lim_{x \rightarrow 1} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$ .
- 4.429.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}}$ .      4.430.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$ .
- 4.431.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( 2 - \frac{x}{\alpha} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{\alpha}} \quad (\alpha \neq 0)$ .      4.432.  $\lim_{x \rightarrow \beta} \left( \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta \alpha} \right)^{\frac{1}{x-\beta}} \quad (\alpha \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$ .



$$4.433. \lim_{x \rightarrow 1} (\ln(e^x + x - 1))^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}.$$

$$4.434. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x^2 + e^{x+1}))^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.435. \lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(x + e^x))^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$4.436. \lim_{x \rightarrow 1} (\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\ln(x^2 - 2x + 2)}}.$$

$$\checkmark 4.437. \lim_{x \rightarrow 1} (4^x - \sqrt{x+8})^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$4.438. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x \cdot 2^x + 1}{x \cdot 3^x} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$4.439. \lim_{x \rightarrow \pi} \left( \frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x - \pi})^2}}.$$

$$\checkmark 4.440. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(10 + e^x)}{x} \right)^{\sqrt{e^{2x} + 10}}.$$

$$4.441. \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{th} x|^{\operatorname{sh} 2x}.$$

$$4.442. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}.$$

◇ 4.443\*: Найти главную часть вида  $Cx^\alpha$  функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccos} \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

$$4.444*: \text{Найти предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$4.445*: \text{Найти предел } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Найти предел последовательности (4.446—4.452).

$$4.446. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 1}.$$

$$4.447. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n}).$$

$$\checkmark 4.448. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n - 1}}{\ln(1+n) - \ln(2+n)}.$$

- 4.410.  $-\frac{112\sqrt{3}\ln 2}{\pi^2}$ . 4.411.  $\frac{8}{7}$ . 4.412.  $-\frac{9}{10}$ . 4.413. 1. 4.414. 0. 4.415.  $-\frac{\alpha}{2\beta}$ .
- 4.416.  $\frac{21}{26}\pi\alpha$ . 4.417. 0. 4.418.  $-\frac{3}{2}$ . 4.419.  $-\frac{9}{2}$ . 4.420.  $\frac{3a^b \ln a}{2}$ .
- 4.421.  $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2m}$ . 4.422. -1. 4.423.  $e^2$ . 4.424.  $e^{-2}$ . 4.425.  $e^{-1/2}$ .
- 4.426.  $e^{\frac{2(\pi-1)}{\pi}}$ . 4.427.  $e^2$ . 4.428. 1. 4.429.  $e^{2\pi}$ . 4.430.  $e^{-\pi/4}$ . 4.431.  $e^{-1/\pi}$ .
- 4.432.  $e^{\alpha \operatorname{ctg}(\alpha\beta)}$ . 4.433.  $e^{3(1+1/e)}$ . 4.434.  $e$ . 4.435. 0. 4.436.  $e^{-2\pi^2}$ .
- 4.437.  $4^{-\frac{8}{\pi}} e^{\frac{1}{3\pi}}$ . 4.438.  $\left(\frac{27e}{4}\right)^{\frac{2}{3\pi}}$ . 4.439.  $e^{16}$ . 4.440. 1. 4.441. 1. 4.442.  $e^{-1}$ .
- 4.443.  $\frac{1}{2x^3}$ . 4.444.  $\frac{1}{2}$ . 4.445.  $e^{1/2}$ . 4.446. 1. 4.447. 0. 4.448. -1. 4.449. 0.
- 4.450.  $\sqrt{2}$ . 4.451. -1. 4.452.  $e^{-\frac{4}{\pi^2 x}}$ .
- 4.453.  $y = 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;  $y = -2x - 1$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 4.454.  $y = 2x + \frac{5}{2}$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;  
 $y = -\frac{1}{2}$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 4.455.  $y = 2x + 5$ . 4.456.  $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$ . 4.457, 4.458.  $y = 1$ .
- 4.459.  $y = 2x$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;  $y = 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 4.460.  $y = \frac{x}{2}$  при  $x \rightarrow +\infty$ .
- 4.461. Функция ограничена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Более того, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такая окрестность точки  $x_0$ , что для любого  $x$  из этой окрестности выполнено неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon + \inf a_n$ . Условие  $\inf a_n = 0$  необходимо и достаточно для равносильности сформулированного условия и непрерывности функции  $f$  в точке  $x_0$ .
- 4.462. Нет; ограниченность функции в некоторой окрестности точки  $x_0$ .
- 4.463. а) Да. Например,  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x-a}, & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases}$  или  $f(x) = \operatorname{sgn}^2(x-a)$ .
- б) Да. Например,  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-a}, & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases}$  или  $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a)$ .
- в) Нет. *Указание.* Рассмотреть  $h' = -h$ .
- 4.464. а)  $f(x) \pm g(x)$  разрывны;  $f(x)g(x)$  может быть как непрерывной, так и разрывной, например: 1)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \operatorname{sgn} x$ ; 2)  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = \operatorname{sgn} x$ .
- б) Рассмотреть примеры: 1)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $g(x) = -\operatorname{sgn} x$ ; 2)  $f(x) = g(x) = \operatorname{sgn} x$ ;  
 3)  $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ ,  $g(x) = 1 - |\operatorname{sgn} x|$ .
- 4.465. Например,  $g(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $f(x) = x(x^2 - 1)$ ,  $a = 0$ .
- 4.486.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва.
- 4.487.  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — точки бесконечного разрыва второго рода.
- 4.488.  $x = 1$  — точка устранимого разрыва,  $x = -2$ ,  $x = 4$  — точки бесконечного разрыва второго рода.
- 4.489.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва,  $x = -1$  — точка бесконечного разрыва второго рода.
- 4.490.  $x = 0$  — точка разрыва второго рода.
- 4.491.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва,  $x = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — точки неустраняемого разрыва первого рода.
- 4.492.  $x = \pm\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — точки неустраняемого разрыва первого рода.
- 4.493.  $x \in \mathbb{Z}$  — точки неустраняемого разрыва первого рода.
- 4.494.  $x = 1$  и  $x = -1$  — точки неустраняемого разрыва первого рода.
- 4.495.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва.
- 4.496.  $x = 0$  — точка разрыва второго рода.
- 4.497.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва.