Глава 5

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

§ 5.1. Производная и дифференциал

5.1.1. Определение дифференцируемости

В предыдущей главе рассматривались непрерывные функции, для которых малому приращению аргумента Δx соответствует малое изменение приращения функции Δf, т. е. $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = o(1)$ при $\Delta x \to 0$. Однако для произвольной непрерывной функции ничего нельзя сказать заранее о порядке малости этой бесконечно малой величины. Как в теории, так и на практике крайне важен более узкий класс непрерывных функций, называемых *дифференцируемыми*, для которых приращение функции имеет или тот же порядок малости, что и приращение аргумента, т. е. $\Delta f \sim C\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, где $C \neq 0$, или более высокий порядок малости, чем приращение аргумента, т. е. $\Delta f = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Число $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ называется *производной* функции f в точке x и обозначается $f'(x)$. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x, если справедливо представление $f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x; h)$, где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$. Выражение $A(x)h$, представляющее собой главную линейную часть приращения функции f, называется *дифференциалом* этой функции в точке x и обозначается df.

Для функции одной переменной понятия дифференцируемости функции в точке x и существования производной в точке x равносильны, причём величина $A(x)$ из определения дифференцируемости в точности равна $f'(x)$. Таким образом, для дифференциала функции f справедливо равенство $df = df(x; h) = f'(x)h$. Заметим, что дифференциал является функцией двух аргументов: точки x и приращения h. Однако в большинстве случаев для краткости второй аргумент дифференциала (приращение) опускается; если же из контекста ясно, в какой точке рассматривается дифференциал, то опускаются оба аргумента.

Если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$ и $df = 1 \cdot h$, т. е. $dx = h$. Поэтому дифференциал функции f обычно записывают в виде $df(x) = f'(x)\,dx$, где dx — синоним приращения h. Формально поделив на dx, получаем ещё одно распространённое обозначение для производной: $f' = \dfrac{df}{dx}$.

Задача 5.1. Доказать, что функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ представима в виде $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$, где g — функция, непрерывная в точке x_0.

Решение. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \alpha(x_0; x - x_0) = g(x)(x - x_0),$$

где $g(x) = A(x_0) + \dfrac{\alpha(x_0; x - x_0)}{x - x_0}$. Поскольку $\alpha(x_0; x - x_0) = o(x - x_0)$, получаем $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A(x_0)$. Полагая $g(x_0) = A(x_0)$, получаем требуемое.

Обратно, если $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$, где функция g непрерывна в точке x_0, то

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

□

Задача 5.14. Используя определение, найти производную функции $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ для $\Delta f = f(x + h) - f(x)$ имеем

$$\Delta f = (x + h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k x^{n-k} - x^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k h^k x^{n-k} = nx^{n-1}h + \alpha(x; h),$$

где $\alpha(x; h) = \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k h^k x^{n-k}$ при $n \geqslant 2$ и $\alpha(x; h) = 0$ при $n = 1$. В любом случае $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, поэтому функция f дифференцируема в каждой точке x и $df(x) = nx^{n-1}\,dx$. В частности, отсюда находим $f'(x) = nx^{n-1}$. □

Основные правила дифференцирования

Если функции f и g дифференцируемы в точке x, α и β — постоянные, то в этой точке

$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, $\qquad d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$,

$(fg)' = f'g + g'f$, $\qquad d(fg) = gdf + fdg$,

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$, $\qquad d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$, если $g(x) \neq 0$.

Дифференцирование композиции функций. Если функция g дифференцируема в точке t, а функция f дифференцируема в точке $x = g(t)$, то сложная функция $f \circ g$ дифференцируема в точке t и $(f \circ g)'(t) = f'(x)g'(t) = f'(g(t))g'(t)$.

Из правила дифференцирования композиции вытекает свойство *инвариантности формы первого дифференциала*, которое состоит в следующем. Если $y = f(x)$, где x — независимая переменная, то $dy = f'(x)\,dx$. Если же теперь x есть функция аргумента t, $y = f(x(t))$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем $dy = f'(x(t))x'(t)\,dt$. Поскольку $dx = x'(t)\,dt$, в данном случае также получаем $dy = f'(x)\,dx$, т. е. вид дифференциала не зависит от того, является ли x независимым аргументом или функцией другого аргумента. Необходимо только иметь в виду, что если x — независимая переменная, то dx есть приращение этой переменной Δx, а если $x = x(t)$, то dx есть дифференциал функции $x(t)$, представляющий собой главную линейную часть приращения Δx.

5.1.2. Вычисление производной

Таблица производных основных элементарных функций

$(1)'=0$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)'=ax^{a-1}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$ (в частности, $(e^x)'=e^x$)	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (в частности, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$)	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Степенная функция $y=x^a$ при $0<a<1$ определена, но не дифференцируема при $x=0$, и именно при $x=0$ выражение для её производной теряет смысл. Точно так же выражения для производных функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ теряют смысл, если $|x|\geqslant 1$, т.е. именно при тех значениях аргумента, при которых соответствующие функции либо не определены, либо не дифференцируемы. Все остальные основные элементарные функции дифференцируемы во всех точках множества определения, и выражения для их производных имеют смысл во всех точках этого множества.

В силу правил дифференцирования и теоремы о производной композиции любая элементарная функция f дифференцируема во всякой точке, в которой выражение для её производной (т.е. функции f') имеет смысл. В дальнейшем при выполнении формального дифференцирования будем считать, что рассматриваются те значения аргумента, в которых все выражения имеют смысл.

Задача 5.30. Найти производную функции $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+10}{\sqrt{x}}$.

Решение. Поскольку $f(x)=4x^{3/2}-2x^{1/2}+10x^{-1/2}$, получаем

$$f'(x)=4\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}+10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}=\frac{6x^2-x-5}{x\sqrt{x}}.\quad\square$$

Задача 5.43. Найти производную функции $f(x)=x(\cos x-4\sin x)$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=(\cos x-4\sin x)+x(-\sin x-4\cos x)=(1-4x)\cos x-(4+x)\sin x.\quad\square$$

Задача 5.50. Найти производную функции $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}$.

Решение. Получаем $f'(x)=\left((\operatorname{tg}^3 2x+2)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{tg}^3 2x+2)'=$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot(\operatorname{tg} 2x)'=\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2,$$

т.е. $f'(x)=\dfrac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}}$. $\square$

Задача 5.69. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$.

Решение. Получаем

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2) - (-2x)\arcsin x}{(1-x^2)^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + 2x\arcsin x}{(1-x^2)^2}. \qquad \square$$

Задача 5.82. Найти производную функции $f(x) = \ln^3 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Решение. Получаем

$$f'(x) = 3\ln^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^3}} \cdot \left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9\ln^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}. \qquad \square$$

Для дифференцирования степенно-показательной функции $(u(x))^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, пользуются тождеством $(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$.

Задача 5.84. Найти производную функции $f(x) = x^x$.

Решение. Имеем $f(x) = e^{x\ln x}$,

$$f'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1). \qquad \square$$

Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля и дифференцируема в некоторой точке. Тогда в этой точке существует производная функции $\ln|f(x)|$, называемая *логарифмической производной* функции $f(x)$. По правилу дифференцирования композиции функций справедливо равенство $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. В самом деле, если $f(x) > 0$, то это равенство очевидно, а если $f(x) < 0$, то $(\ln|f(x)|)' = (\ln(-f(x)))' = \dfrac{-f'(x)}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Следовательно, если $f(x) \neq 0$, то производную функции $f(x)$ можно найти следующим образом:

$$f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'.$$

Задача 5.92. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3}$.

Решение. При $x \neq -3, 2, -\dfrac{9}{2}$ функция $f(x)$ отлична от нуля и дифференцируема, поэтому при таких x имеем

$$\ln|f(x)| = \frac{5}{7}\ln|x+3| - 6\ln|x-2| - 3\ln|2x+9|,$$

следовательно, $f'(x) = f(x)\left(\dfrac{5}{7}\ln|x+3| - 6\ln|x-2| - 3\ln|2x+9|\right)' =$

$$= \frac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3}\left(\frac{5}{7(x+3)} - \frac{6}{x-2} - \frac{6}{2x+9}\right). \qquad \square$$

Задача 5.90. Найти производную функции $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$.

Решение. Имеем $\ln f(x) = x\ln\operatorname{arctg} x$. Следовательно,

$$f'(x) = f(x)(x\ln\operatorname{arctg} x)' = (\operatorname{arctg} x)^x\left(\ln\operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right). \qquad \square$$

Если выражение для производной не определено для некоторого значения x_0 из множества определения f, то это говорит о том, что какая-то из основных элементарных функций, из которых составлено выражение для функции f, не дифференцируема при соответствующем значении аргумента; и, следовательно, вопрос о существовании и величине производной f в этой точке требует дополнительного исследования.

Задача 5.98. Найти производную функции $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$, $|x|<\sqrt{\pi}$.

Решение. Формально применяя правила дифференцирования, получаем

$$f'(x)=\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}+x\cdot\frac{2x\cos x^2\cdot(1-x)^2-2(1-x)\sin x^2}{2\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}}.$$

На данном интервале функция $f'(x)$ не определена только при $x=0$ и $x=1$, поэтому для всех x из множества $(-\sqrt{\pi};\sqrt{\pi})\setminus\{0,1\}$ производная существует и её значение вычисляется по полученной формуле. Вопрос о существовании и величине производной данной функции при $x=0$ и при $x=1$ решаем непосредственно исходя из определения производной в точке.

Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $x=0$ и $x=1$. Если $x=0$, то $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\sqrt{(1-h)^2\sin h^2}$, следовательно, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0=f'(0)$. Если $x=1$, то $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=(1+h)\sqrt{\sin(1+h)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}$, а это выражение не имеет предела при $h\to 0$.

Итак, функция $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$ не дифференцируема при $x=1$, а при $x=0$ имеет производную, равную нулю. □

Задача 5.100. Найти производную функции $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Решение. Имеем $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, если $x\neq 0$. Значение $f'(0)$ вычислим по определению: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$. Поэтому функция f дифференцируема на всей числовой прямой, и

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$ □

Числа $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_+(x)$ и $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_-(x)$ называются соответственно *правой* и *левой производной* функции f в точке x. Условие $f'_+(x)=f'_-(x)$ (т. е. существование и равенство односторонних производных функции f в точке x) эквивалентно дифференцируемости функции f в точке x, при этом $f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$.

Задача 5.102. Найти $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\frac{-e^{-x^2}\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}}=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

Функция f' определена при всех $x \neq 0$. Если $x \to 0$, то $\sqrt{1-e^{-x^2}} \sim \sqrt{x^2}$, поэтому

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Итак, $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ при всех $x \neq 0$, $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$.

Поскольку $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, заключаем, что в точке $x=0$ рассматриваемая непрерывная функция не дифференцируема. □

Отметим, что всякая чётная функция f или не дифференцируема в нуле, или $f'(0)=0$ (см. задачу 5.24).

Задача 5.103. Найти $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x) = x\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

Решение. Имеем

$$f'(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}.$$

Функция $f'(x)$ определена при всех $x \neq 0$. Для $x=0$ находим $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, поскольку

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\ln(1+x^2)} = 0.$$

Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln(1+x^2)} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$ □

Задача 5.108. Найти $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Решение. Заметим, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Если $x \neq 0$, то

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \sin\frac{1}{x} - x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Найти производную $f'(0)$, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, нельзя. Поскольку $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \sin\dfrac{1}{x}$ и функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела как при $x \to 0+$, так и при $x \to 0-$, заключаем, что функция f не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной. □

Замечание. На практике удобно пользоваться следующим свойством: если функция f непрерывна в точке a, производная f' существует в некоторой правой (левой) полуокрестности a и существует $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ ($\lim\limits_{x\to a-} f'(x)$), то этот предел равен $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$) (см. задачу 5.215).

Обратите внимание: условие непрерывности функции f в этом утверждении существенно, что показывает следующий пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)<f(0)<\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\frac{\pi}{2}$, функция f в точке $x=0$ не является непрерывной ни справа, ни слева, следовательно, $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ не существуют (см. задачу 5.115). В то же время при $x\neq 0$ справедливо равенство $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$, и существуют оба предела $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-1$.

Отметим также, что из существования односторонних производных $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ (в частности, из дифференцируемости функции в точке x_0) не следует существование пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f'(x)$ (см. задачу 5.100).

Задача 5.111. Исследовать на дифференцируемость функцию f и найти её производную, если а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\geqslant 0,\\ x^2+x, & x<0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Решение. а) Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ при $x>0$, $f'(x)=2x+1$ при $x<0$, поэтому $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1+x^2}=1$, $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}(2x+1)=$ $=1$. Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ 2x+1, & x<0.\end{cases}$$

б) Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Если $x\neq 0$, то $f'(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$, откуда получаем

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+} f'(x)=\frac{\pi}{2},\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0-} f'(x)=-\frac{\pi}{2},\quad f'_-(0)\neq f'_+(0).$$

Итак, в точке $x=0$ функция $f(x)$ не дифференцируема, а при $x\neq 0$ имеем $f'(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$. □

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a;b\rangle$, если 1) она дифференцируема в каждой внутренней точке этого промежутка; 2) в случае когда концевая точка промежутка собственная и принадлежит этому промежутку, f имеет в этой точке одностороннюю производную: правую в точке a и левую в точке b.

Задача 5.117. Исследовать функцию $f(x)=|x|$ на дифференцируемость: а) в точке $x=0$; б) на отрезке $[0;1]$.

Решение. а) Поскольку $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$ и $f'_-(0)=$ $=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$, функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$.

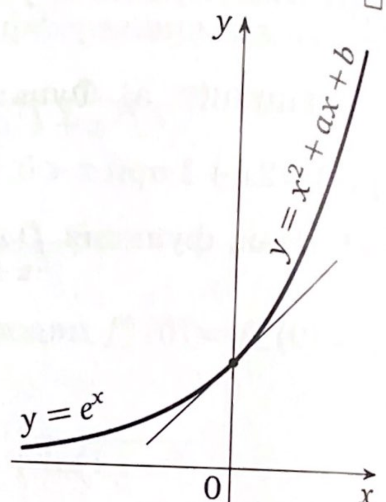
б) При $x\geqslant 0$ имеем $f(x)=x$, поэтому на интервале $(0;1)$ функция f дифференцируема. Кроме того, функция дифференцируема и в точке $x=1$, а значит, существует $f'_-(1)$. Согласно п. а) существует $f'_+(0)$. Итак, функция $f(x)=|x|$ дифференцируема на отрезке $[0;1]$. □

Задача 5.118. Пусть $\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant a, \\ g(x), & x < a. \end{cases}$ Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции f и g, чтобы функция φ была дифференцируемой на всей числовой прямой?

Решение. Поскольку $\varphi(x) = f(x)$ при $x > a$ и $\varphi(x) = g(x)$ при $x < a$, условие дифференцируемости f при $x > a$ и g при $x < a$ необходимо и достаточно для дифференцируемости φ на множестве $(-\infty; a) \cup (a; +\infty)$. Для дифференцируемости φ в точке a прежде всего необходимо условие непрерывности: $\varphi(a-0) = \varphi(a+0) = \varphi(a)$, которое в данном случае эквивалентно условию $f(a) = g(a-0)$. Кроме того, требуется выполнение равенства $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(a)$, т. е. $f'_+(a) = g'_-(a-0)$ (см. замечание на с. 288). □

Задача 5.119. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ x^2 + ax + b, & x > 0. \end{cases}$$



Найти такие значения a и b, чтобы f была дифференцируемой на всей числовой прямой.

Решение. Поскольку f должна быть непрерывна в точке 0, получаем

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 1,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to 0+}(x^2 + ax + b) = b = e^0 = 1$, откуда $b = 1$. Далее, $f'_+(0) = (x^2 + ax + b)'|_{x=0} = a$ и $f'_-(0) = (e^x)'|_{x=0} = 1$, следовательно, $f'(0)$ существует, если $a = 1$ и $b = 1$. При этих значениях a и b функция f дифференцируема на всей числовой прямой. □

5.1.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции $f'(x)$ называется *второй производной функции* f и обозначается f''. Далее определение даётся по индукции: *производная n-го порядка* (n-я производная) $f^{(n)}$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Для неё также используют обозначение $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Задача 5.138. Показать, что $y^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$, где ...