Задача 4.307. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$.

Решение. Снова воспользуемся результатом задачи 4.294. Положим $u(x)=\dfrac{a^x+b^x}{2}$, $v(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$,

$$\lim_{x\to 0}v(x)(u(x)-1)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln ab$$

(см. задачу 4.273). Следовательно, искомый предел равен $e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$. □

§ 4.3. Сравнение асимптотического поведения функций

Современный язык о-символики позволяет существенно упростить выкладки при нахождении пределов.

Определение. Пусть $f,g\colon \mathring{U}(\omega)\to\mathbb{R}$, где $\mathring{U}(\omega)$ — некоторая проколотая окрестность точки ω, и $f(x)=\gamma(x)g(x)$ при всех $x\in\mathring{U}(\omega)$. Тогда

1) функция $f(x)$ *эквивалентна* функции $g(x)$ при $x\to\omega$ (обозначение: $f(x)\sim g(x)$, $x\to\omega$), если $\lim\limits_{x\to\omega}\gamma(x)=1$;

2) функция $f(x)$ есть *о-большое* от функции $g(x)$ при $x\to\omega$ (обозначение: $f(x)=O(g(x))$, $x\to\omega$), если $\gamma(x)$ ограничена в $\mathring{U}(\omega)$;

3) функция $f(x)$ есть *о-малое* от функции $g(x)$ при $x\to\omega$ (обозначение: $f(x)=o(g(x))$, $x\to\omega$), если $\lim\limits_{x\to\omega}\gamma(x)=0$.

Если $g(x)\neq 0$ при всех $x\in\mathring{U}(\omega)$, то приведённое выше определение равносильно следующему:

1) $f(x)\sim g(x)$ при $x\to\omega$, если $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$;

2) $f(x)=O(g(x))$ при $x\to\omega$, если отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничено в $\mathring{U}(\omega)$;

3) $f(x)=o(g(x))$ при $x\to\omega$, если $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Отметим, что записи $f(x)=O(g(x))$ и $f(x)=o(g(x))$ не являются равенствами в обычном смысле; каждое из них означает лишь, что функция $f(x)$ обладает соответствующим свойством по отношению к функции $g(x)$. Например, из того, что $f_1(x)=o(g(x))$ и $f_2(x)=o(g(x))$ при $x\to\omega$, вовсе не следует, что $f_1(x)=f_2(x)$.

В соответствии с определением, $f(x)=O(1)$, $x\to\omega$, если функция $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $x=\omega$; в этом случае говорят, что функция f *финально ограничена* при $x\to\omega$. Запись $f(x)=o(1)$, $x\to\omega$, означает, что $\lim\limits_{x\to\omega}f(x)=0$.

Если о-символика содержится в обеих частях равенства, то равенство понимается в следующем смысле: любая функция, обладающая свойством, выраженным в левой части равенства, обладает и свойством, выраженным в его правой части (но не обязательно наоборот!). Так, $o(f)=O(f)$, но $O(f)\neq o(f)$: любая бесконечно малая функция является финально ограниченной, тогда как обратное, вообще говоря, неверно. Таким образом, равенства с о-символикой некоммутативны, но транзитивны, т.е. можно записывать цепочки равенств, читая их только слева направо.

Задача 4.312. в) Доказать равенство $o(x^2)+o(x)=o(x)$ при $x\to 0$.

Решение. Если $f(x)=o(x^2)$, $g(x)=o(x)$ при $x\to 0$, то при некотором $\delta>0$ имеем $f(x)=\alpha(x)x^2$, $g(x)=\beta(x)x$, $|x|<\delta$, где $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 0}\beta(x)=0$. Тогда $f(x)+g(x)=(\alpha(x)x+\beta(x))x=o(x)$, $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha(x)x+\beta(x))=0$. □

Отметим, что

$$\lim_{x\to\omega} f(x)=l \iff f(x)=l+o(1),\ x\to\omega.$$

Задача 4.320. Доказать, что $f(x)\sim g(x)$, $x\to\omega$, тогда и только тогда, когда $f(x)=g(x)+o(g(x))$ при $x\to\omega$.

Решение. Равенство $f(x)=\gamma(x)g(x)$ можно записать в виде $f(x)-g(x)=(\gamma(x)-1)g(x)$, поэтому доказываемое утверждение следует из того, что $\lim\limits_{x\to\omega}\gamma(x)=1$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to\omega}(\gamma(x)-1)=0$. □

Если $f(x)=g(x)+o(g(x))$, $x\to\omega$, то говорят, что функция $g(x)$ есть *главная часть* функции $f(x)$ при $x\to\omega$. Из результата предыдущей задачи следует, что функция эквивалентна своей главной части: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to\omega$.

Функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет бесконечное множество эквивалентных ей функций, поэтому при постановке задачи выделения главной части $f(x)$ при $x\to a$ мы указываем, какой именно вид должна иметь эта главная часть, по возможности — наиболее простой. Во многих случаях главную часть при $x\to a$ можно найти в виде $C(x-a)^\alpha$ (при $x\to+\infty$ — в виде Cx^α) для некоторых $C\neq 0$ и $\alpha\in\mathbb{Q}$.

Задача 4.333. Найти главную часть вида Cx^α при $x\to+\infty$ функции $f(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$, $\alpha_0\neq 0$.

Решение. *Первый способ.* Разделив многочлен на старший член, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\alpha_0x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{x}+\dfrac{\alpha_2}{x^2}+\ldots+\dfrac{\alpha_n}{x^n}}{\alpha_0}=1.$$

Следовательно, $f(x)\sim\alpha_0x^n$ при $x\to+\infty$.

Второй способ. Согласно задаче 4.315, имеем $\alpha_{n-k}x^k=o(x^n)$, $x\to+\infty$, $0\leqslant k\leqslant n-1$. Следовательно, $f(x)=\alpha_0x^n+o(x^n)$ при $x\to+\infty$ и одночлен α_0x^n является главной частью многочлена $f(x)$ искомого вида. □

Замечание. В этой задаче главными частями функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ также являются функции $g(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}$, $h(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}$ и т. д., однако они не имеют требуемого вида Cx^α.

Задача 4.344. Найти главную часть вида Cx^α при $x\to 0$ функции

$$f(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-m}x^m,\quad \alpha_{n-m}\neq 0.$$

Решение. *Первый способ.* Разделив многочлен на младший член, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-m}x^m}{\alpha_{n-m}x^m}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^{n-m}+\alpha_1x^{n-m-1}+\ldots+\alpha_{n-m}}{\alpha_{n-m}}=1$$

следовательно, $f(x)\sim\alpha_{n-m}x^m$ при $x\to 0$.

Второй способ. Согласно задаче 4.315, имеем $\alpha_{n-k}x^k=o(x^m)$, $x\to 0$, $m+1\leqslant k\leqslant n$. Следовательно, $f(x)=\alpha_{n-m}x^m+o(x^m)$ при $x\to 0$ и одночлен $\alpha_{n-m}x^m$ является главной частью многочлена $f(x)$ искомого вида. □

Для удобства работы с трансцендентными функциями запишем первый и второй замечательный предел и их следствия в виде соотношений эквивалентности, которые часто называют табличными.

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + o(x)$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{sh} x = x + o(x)$
$\operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\operatorname{th} x \sim x$	$\operatorname{th} x = x + o(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

Следует отметить, что в соотношения эквивалентности в первом столбце, а значит, и в равенства во втором, можно подставлять вместо x выражения вида $x(t)$ при условии $x(t) \to 0, t \to \omega$ (сами соотношения и равенства, естественно, будут иметь место при $t \to \omega$). Действительно, все эти соотношения можно записать в виде $f(x) = \gamma(x)g(x)$, где $\gamma(x) \to 1$, $x \to 0$, и $f(0) = g(0) = 0$, поэтому можно считать, что $\gamma(0) = 1$, т. е. γ непрерывна в нуле. Подставляя $x = x(t)$, получим $f(x(t)) = \gamma(x(t))g(x(t))$, причём по теореме о пределе композиции функций $\lim\limits_{t\to\omega} \gamma(x(t)) = \gamma\big(\lim\limits_{t\to\omega} x(t)\big) = \gamma(0) = 1$, т. е. $f(x(t)) \sim g(x(t))$, $t \to \omega$.

Если главная часть вида $C(x-a)^\alpha$ имеет нецелый показатель α, то рассматривается база $x \to a+$.

Задача 4.348. Найти главную часть вида Cx^α функции

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}} \cdot \ln\frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \text{при} \quad x \to 0+.$$

Решение. При $x \to 0+$ имеем

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{x}} \cdot \ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \sqrt{x + x^{1/3}} \cdot \ln\left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) =$$
$$= x^{1/6}\sqrt{x^{2/3}+1} \cdot \ln\left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) \sim x^{1/6} \cdot (-2x^2) = -2x^{13/6}.$$

Таким образом, главной частью искомого вида функции $f(x)$ при $x \to 0+$ является одночлен $-2x^{13/6}$. □

Задача 4.358. Найти главную часть вида $C(x-1)^\alpha$ функции

$$f(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

Решение. Если ввести новую переменную $z = x - 1$, то получим
$4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 = 4(1+z)^{1/4} - 5(1+z)^{1/5} + 1 =$
$= 4\Big(1 + \frac{z}{4} + o(z)\Big) - 5\Big(1 + \frac{z}{5} + o(z)\Big) + 1 = 4 + z + o(z) - 5 - z + o(z) + 1 = o(z)$,
таким образом, этим методом мы не получили функцию, эквивалентную данной (поскольку $\forall n > 1$ имеем $z^n = o(z)$, $z \to 0$). Введём переменную t так, чтобы избавиться от иррациональности: $x = t^{20}$. Тогда поскольку $x \to 1$, получаем $t \to 1$ и

$$x - 1 = t^{20} - 1 = (t-1)(1 + t + t^2 + \ldots + t^{19}) \sim 20(t-1), \quad t - 1 \sim \frac{x-1}{20},$$
$$4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 = 4t^5 - 5t^4 + 1 = (t-1)^2(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1) \sim 10(t-1)^2.$$

Следовательно, $f(x) \sim \frac{(x-1)^2}{400} \cdot 10 = \frac{(x-1)^2}{40}$ при $x \to 1$, тем самым найдена главная часть искомого вида функции $f(x)$ при $x \to 1$. □

Задача 4.368. Найти главную часть вида $\frac{C}{n^\alpha}$ последовательности (a_n), $a_n = \big|\sin\big(\pi\sqrt{n^2+k}\big)\big|$, $k \neq 0$.

Решение. Заметим, что аргумент синуса близок к πn, поэтому вычитание этой величины из аргумента (не изменяющее модуль синуса) приведёт к стремлению аргумента к нулю, что даст возможность использовать таблицу эквивалентных функций. Итак,

$$a_n = \big|\sin\big(\pi(\sqrt{n^2+k} - n)\big)\big| = \sin\frac{\pi k}{\sqrt{n^2+k}+n} \sim \frac{\pi k}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k/n^2}+1} \sim \frac{\pi k}{2n},$$

т.е. главная часть a_n имеет вид $b_n = \frac{\pi k}{2n}$. Другим способом решения было бы применение разложения с о-символикой внутри аргумента синуса: $\pi\sqrt{n^2+k} = \pi n\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} = \pi n\Big(1 + \frac{k}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = \pi n + \frac{\pi k}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$, откуда $a_n = \Big|\sin\Big(\pi n + \frac{\pi k}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big| = \sin\Big(\frac{\pi k}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \sim \frac{\pi k}{2n}$. □

Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \omega$, то равенство $h(x)f(x) = h(x)g(x) \cdot \gamma(x)$ ($\gamma(x) \to 1$, $x \to \omega$) показывает, что или $\lim\limits_{x\to\omega} h(x)f(x) = \lim\limits_{x\to\omega} h(x)g(x)$, или оба предела не существуют. Таким образом, для упрощения нахождения предела произведения функций любой множитель в нём можно заменить на эквивалентную функцию. То же можно утверждать о делителях выражений, стоящих под знаком предела (обоснуйте!). Так, для нахождения предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ ввиду соотношений $\operatorname{tg} x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $x \to 0$ можно записать равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

При этом использование соотношений $\sin x = x + o(x)$ и $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, $x \to 0$, позволило бы только утверждать, что $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x)$, $x \to 0$, то есть сравнить числитель рассматриваемого выражения с x, а не с x^3. Для необходимого при поиске предела сравнения с x^3 требуется более глубокий анализ с помощью формулы Тейлора (см. далее § 4.5).

Внимание! Одна из самых распространённых ошибок при нахождении предела некоторого выражения — замена функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Задача 4.377. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}$. Можно ли для этого воспользоваться соотношениями $2-2\cos 2x\sim 4x^2$ и $\sin^2 2x\sim 4x^2$ при $x\to 0$?

Решение. Производя тождественные преобразования и заменяя числитель на эквивалентное выражение, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{x^4}=4.$$

Если же воспользоваться данными соотношениями, то получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-4x^2}{x^4}=0$, что не совпадает с полученным верным результатом. □

Задача 4.399. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x)-\sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$.

Решение. *Первый способ.* Разделив числитель и знаменатель на x и пользуясь арифметическими свойствами предела и заменой числителей на эквивалентные выражения, получаем, что искомый предел равен

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+e^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}-3}{4}=-\frac{1}{4}.$$

Второй способ. Используя o-символику, приводим искомый предел к виду

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x+o(x))-3x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+o(1)}{4+o(1)}=-\frac{1}{4}.\quad\square$$

В достаточно простых задачах раскрытие неопределённостей методами предыдущего параграфа обычно не сложнее решения через o-символику. Однако при наличии в выражении разнородных функций второй метод обычно удобнее. Кроме того, он более алгоритмичен: для его применения достаточно воспользоваться разложениями из таблицы на с. 232 и свойствами o-малого.

Задача 4.400. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\operatorname{tg} 5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}}$.

Решение. Привлечение на сопряжённого выражение привело бы к весьма громоздким выкладкам, поэтому воспользуемся табличными разложениями. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg} 5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x+o(x)-1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-1-\dfrac{x}{5}+o(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)}{-\dfrac{x}{5}+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5+o(1)}{-\dfrac{1}{5}+o(1)}=\frac{5}{-\dfrac{1}{5}}=-25.\quad\square$$

Если ищется предел функции при $x \to a$, $a \neq 0$, то для удобства можно перейти к новому аргументу $y = x - a$, предел которого равен нулю при $x \to a$. Это позволит применять разложения из таблицы на с. 232.

Задача 4.416. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\dfrac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x - \sqrt[7]{x})}$.

Решение. Положим $y = x - 1$, тогда

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\dfrac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x - \sqrt[7]{x})} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}(1+y)^\alpha\right)}{\ln(2y + 2 - \sqrt[7]{1+y})} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{2}\alpha y + o(y)\right)}{\ln\left(2y + 2 - 1 - \dfrac{1}{7}y + o(y)\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\alpha y + o(y)\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{13}{7}y + o(y)\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{3\pi}{2}\alpha y + o(y)}{\dfrac{13}{7}y + o(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{3\pi}{2}\alpha + o(1)}{\dfrac{13}{7} + o(1)} = \frac{21}{26}\pi\alpha. \qquad \square$$

Задача 4.426. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} (\sin \pi x + x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

Решение. Найдём $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} \ln(\sin \pi x + x)\right)$, полагая $y = x - 1$. Имеем

$$\lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} \ln(\sin \pi x + x)\right) = \lim_{y\to 0} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi(y+1)}{2} \ln(\sin \pi(y+1) + y + 1)\right) =$$

$$= -\lim_{y\to 0} \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2} \ln(1 + y - \sin \pi y)\right) = -\lim_{y\to 0} \left(\frac{2}{\pi y}(y - \sin \pi y)\right) =$$

$$= -\lim_{y\to 0} \frac{2(y - \pi y + o(y))}{\pi y} = \frac{2(\pi - 1)}{\pi}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} (\sin \pi x + x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2(\pi-1)}{\pi}}$. $\square$

Задача 4.443. Найти главную часть вида Cx^α функции $f(x) = \operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1}{x}\right) = 0$ и $\operatorname{tg} z \sim z$ при $z \to 0$, следовательно, при $x \to +\infty$ получаем

$$\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x} \sim \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{1 + x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right)} \sim \frac{1}{x\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right)} \cdot \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{2x^3},$$

таким образом, найдена главная часть искомого вида функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. $\square$

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется правой асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, или, в другой записи, $f(x) = kx + b + o(1)$, $x \to +\infty$.

Аналогично определяется левая асимптота (при $x \to -\infty$). Тем самым задача нахождения асимптоты при $x \to \infty$ равносильна выделению главной части вида $kx + b$.

Задача 4.454. Найти асимптоты графика функции

$$y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 7}.$$

Решение. При $x \to +\infty$ имеем

$$y = x + 1 + x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = x + 1 + x\left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x + \frac{5}{2} + o(1),$$

поэтому график данной функции имеет правую асимптоту $y = 2x + \frac{5}{2}$. Далее, при $x \to -\infty$ получаем

$$y = x + 1 - x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = x + 1 - x\left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{2} + o(1),$$

поэтому прямая $y = -\frac{1}{2}$ является его левой асимптотой. □

§ 4.4. Функции, непрерывные на промежутке. Точки разрыва

Определение. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a, называется *непрерывной* в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0\colon \;\; \forall x \in U_\delta(a) \text{ имеем } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Это определение равносильно определению из п. 4.1.2 (проверьте!). Заменяя $U_\delta(a)$ на [...]