§ 4.2. Раскрытие неопределённостей

В тех случаях, когда имеет место неопределённость, для нахождения предела — «раскрытия неопределённости» — выражение преобразуют так, чтобы сделать возможным применение приведённых выше утверждений и свойств.

При нахождении предела рациональной функции $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в случае $P(a)=Q(a)=0$ у многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ обычно выделяют общий множитель вида $(x-a)^k$.

Задача 4.191. Найти предел рациональной функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. В проколотой окрестности точки $x=1$ функции $\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ и $\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$ тождественно равны. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$ находится с использованием утверждений о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}. \qquad \square$$

Задача 4.196. Найти предел рациональной функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}$.

Решение. *Первый способ.* Раскладывая числитель и знаменатель на множители, аналогично предыдущему примеру получаем

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(x^2-2x+3)}{(x+1)^2(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x+3}{x-2}=\frac{6}{-3}=-2.$$

Второй способ. Произведём сдвиг переменной $t=x+1$ (см. задачу 4.186). При $x\to -1$ имеем $t\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-1)^4+4(t-1)+3}{(t-1)^3-3(t-1)-2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4-4t^3+6t^2}{t^3-3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-4t+6}{t-3}=-2.$$

Отметим, что при таком способе приходится лишь раскрывать скобки, а не раскладывать многочлены на множители. $\square$

Второй способ решения предыдущей задачи с использованием сдвига бывает особенно эффективен при нахождении пределов отношения многочленов высоких степеней.

Задача 4.198. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-3x+2}{x^{50}+5x-6}$.

Решение. Точка $x=1$ является корнем как числителя, так и знаменателя, однако, ввиду их очень большой степени выделение множителя $x-1$ было бы крайне трудоёмким. Пусть $t=x-1$, тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-3x+2}{x^{50}+5x-6}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^{20}-3(t+1)+2}{(t+1)^{50}+5(t+1)-6}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+20t+at^2+\ldots+t^{20}-3t-3+2}{1+50t+bt^2+\ldots+t^{50}+5t+5-6}=\lim_{t\to 0}\frac{17t+at^2+\ldots+t^{20}}{55t+bt^2+\ldots+t^{50}}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{17+at+\ldots+t^{19}}{55+bt+\ldots+t^{49}}=\frac{17}{55}. \qquad \square$$

Задача 4.208. Найти предел рациональной функции

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^m+\alpha_1x^{m-1}+\ldots+\alpha_{m-1}x+\alpha_m}{\beta_0x^n+\beta_1x^{n-1}+\ldots+\beta_{n-1}x+\beta_n},\quad n,m\in\mathbb{N},\quad \alpha_0\beta_0\neq 0.$$

Решение. Пусть $m\leqslant n$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^n:

$$\frac{\alpha_0x^m+\alpha_1x^{m-1}+\ldots+\alpha_{m-1}x+\alpha_m}{\beta_0x^n+\beta_1x^{n-1}+\ldots+\beta_{n-1}x+\beta_n}=\frac{\dfrac{\alpha_0}{x^{n-m}}+\dfrac{\alpha_1}{x^{n-m+1}}\cdots+\dfrac{\alpha_{m-1}}{x^{n+1}}+\dfrac{\alpha_m}{x^n}}{\beta_0+\dfrac{\beta_1}{x}+\ldots+\dfrac{\beta_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{\beta_n}{x^n}}.$$

По теореме об арифметических свойствах предела отсюда находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^m+\ldots+\alpha_m}{\beta_0x^n+\ldots+\beta_n}=\begin{cases}0, & m<n,\\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}, & m=n.\end{cases}$$

Если же $m>n$, то деление дроби на x^m показывает, что рассматриваемое отношение есть бесконечно большая величина. □

Замечание. Предыдущий пример показывает, что правильная рациональная дробь стремится к нулю при $x\to\infty$.

При раскрытии неопределённостей с алгебраическими функциями часто бывает полезно умножение и деление на сопряжённое выражение:

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}},\quad \sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}=\frac{b-a}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2}}.$$

Задача 4.217. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)$.

Решение. Если $x<0$, то

$$\sqrt{x^2+4x+5}+x=\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\frac{4+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=-2$. □

Задача 4.230. Найти $\lim\limits_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Решение. Если $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$, поэтому

$$\lim_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi+}\left(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=-\sqrt{2}\lim_{x\to\pi+}\sin\frac{x}{2}=-\sqrt{2}.\ \square$$

Задача 4.234. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{x^3+x}{x^{10}}\right)}=\frac{2+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|}}.$$

Пользуясь арифметическими свойствами предела функции и теоремой о пределе композиции, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln|x|}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|}=0,$$

откуда находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5}. \qquad \square$$

Перейдём к рассмотрению замены переменной при нахождении предела. Для её обоснования часто используется следующий вариант теоремы о пределе композиции функций.

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a}y(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b}f(y)=l$ *и* $y(x)\neq b$ *в некоторой проколотой окрестности точки* a. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{x\to a}f(y(x))=l$.

Заметим, что условие $y(x)\neq b$, $x\in\mathring{U}(a)$, как и условие непрерывности функции f в теореме о пределе композиции на с. 221, существенно: если $\lim\limits_{x\to a}y(x)=b$ и $\lim\limits_{y\to b}f(y)=l$, то ещё нельзя утверждать, что $\lim\limits_{x\to a}f(y(x))=l$. Действительно, если $f(y)=|\operatorname{sgn} y|=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ а $y(x)=0$ при всех x, то в любой точке a имеем $\lim\limits_{x\to a}f(y(x))=f(0)=0$, хотя $\lim\limits_{y\to 0}f(y)=1$. Более того, из существования пределов функций $f(y)$ и $y(x)$ не вытекает даже существование предела $f(y(x))$.

Задача 4.239. Пусть $f(y)=|\operatorname{sgn} y|$, $y(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$, $x\neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=0$ и $\lim\limits_{y\to 0}f(y)=1$, но $\lim\limits_{x\to 0}f(y(x))$ не существует.

Решение. Равенство $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=0$ следует из неравенства $|y(x)|\leqslant|x|$ и принципа двустороннего ограничения; равенство $\lim\limits_{y\to 0}f(y)=1$ вытекает из верного в проколотой окрестности нуля тождества $f(y)=1$.

Отсутствие предела $\lim\limits_{x\to 0}f(y(x))$ докажем с помощью отрицания определения предела по Гейне (см. утверждение на с. 216). Пусть $t_k=\frac{1}{k}$, $x_k=\frac{2}{4k+1}$, тогда $f(y(t_k))=f(t_k\sin\pi k)=f(0)=0$, $f(y(x_k))=f(x_k\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi k))=f(x_k)=1$, т. е. $0=\lim\limits_{k\to\infty}f(y(t_k))\neq\lim\limits_{k\to\infty}f(y(x_k))=1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}f(y(x))$ не существует. $\square$

Задача 4.245. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Решение. Можно искать данный предел при помощи сопряжённых, но замена переменной вместо этого позволяет обойтись более просто выполнимой операцией разложения на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[12]{x})^3-1}{(\sqrt[12]{x})^4-1}=\left\{\begin{matrix}y=\sqrt[12]{x}\to 1, x\to 1\\ y\neq 1, x\neq 1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^4-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}=\frac{3}{4}. \qquad \square$$

В этом решении в фигурных скобках мы проверили выполнение условий теоремы. Заметим, что для всех достаточно простых замен (скажем, линейных или задаваемых одной из основных элементарных функций) условие $y(x) \neq b = y(a)$, $x \in \mathring{U}(a)$, всегда выполняется, поэтому единственное, что нужно проверять при осуществлении замены — это характер стремления новой переменной. Кроме того, в равенстве выше мы могли сразу перейти от первого предела к третьему, подставляя $x = y^{12}$. Так можно делать всегда, когда замена переменной биективна в некоторой окрестности точки a.

Следующие две часто встречающиеся неопределённости вида $\frac{0}{0}$ называются ***первым и вторым замечательными пределами***:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Задача 4.257. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Используя формулу $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ и замену $t = \frac{x}{2}$, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Задача 4.262. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Решение. С помощью замены $t = \operatorname{arctg} x$ находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1$$

(см. также задачу 4.259). $\square$

Задача 4.272. Пользуясь равенством $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$, вывести *второй замечательный предел* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Решение. В силу неравенства Бернулли имеем

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + x, \quad x > -1.$$

Заменяя в этом неравенстве x на $-x$, получаем

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 - x, \quad x < 1.$$

Перейдём к пределу при $n \to \infty$ в этих неравенствах. Получим, что при всех $x \in (-1; 1)$ выполняются неравенства $e^x \geqslant 1 + x$, $e^{-x} \geqslant 1 - x$. Следовательно, при $x > 0$ верны двойные неравенства

$$1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x},$$

а при $x < 0$ в правом из них будут обратные знаки. Применение принципа двустороннего ограничения позволяет заключить, что $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. $\square$

Задача 4.281. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

Решение. Воспользуемся равенством $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Первый способ. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{2x} - \frac{e^{-x}-1}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-2x}.$$

Для нахождения второго предела воспользуемся заменой $t=-x$; получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} + \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{2t} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Второй способ. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1,$$

так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = \{t = 2x \to 0\} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1. \qquad \square$$

Задача 4.286. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. Сделаем замену $t=\ln(1+x)$. Тогда $x=e^t-1$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1. \qquad \square$$

Задача 4.291. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

Решение. При $\alpha=0$ получается предел тождественно нулевой функции, который равен нулю. Пусть $\alpha\neq 0$. Пользуясь равенством $(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)}$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Согласно задаче 4.286, второй предел равен единице. Для нахождения первого предела сделаем замену $t=\alpha\ln(1+x)$. Тогда находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \alpha. \qquad \square$$

Для раскрытия неопределённости вида 1^∞ используют соотношения

$$\lim_{x\to\omega} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to\omega}\exp(v(x)\ln u(x)) = \exp(\lim_{x\to\omega} v(x)\ln u(x))$$

с последующим применением утверждения второго замечательного предела или его следствий (см. также задачу 4.294).

Задача 4.295. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Решение. *Первый способ.* Производя замену $t=1/x\to 0$, $x\to\infty$, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}} = e.$$

Второй способ. Воспользуемся результатом задачи 4.294. Пусть $u(x) = 1+\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty} v(x)(u(x)-1) = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\dfrac{1}{x} = 1$, следовательно, искомый предел равен e. $\square$

Задача 4.307. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$.

Решение. Снова воспользуемся результатом задачи 4.294. Положим $u(x)=\dfrac{a^x+b^x}{2}$, $v(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$,

$$\lim_{x\to 0}v(x)(u(x)-1)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln ab$$

(см. задачу 4.273). Следовательно, искомый предел равен $e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$. □

§ 4.3. Сравнение асимптотического поведения функций

Современный язык o-символики позволяет существенно упростить выкладки при нахождении пределов.

Определение. Пусть $f,g\colon \mathring{U}(\omega)\to\mathbb{R}$, где $\mathring{U}(\omega)$ — некоторая проколотая окрестность точки ω, и $f(x)=\gamma(x)g(x)$ при всех $x\in\mathring{U}(\omega)$. Тогда

1) функция $f(x)$ *эквивалентна* функции $g(x)$ при $x\to\omega$ (обозначение: $f(x)\sim g(x)$, $x\to\omega$), если $\lim\limits_{x\to\omega}\gamma(x)=1$;

2) функция $f(x)$ есть *o-большое* от функции $g(x)$ при $x\to\omega$ (обозначение: $f(x)=O(g(x))$, $x\to\omega$), если $\gamma(x)$ ограничена в $\mathring{U}(\omega)$;

3) функция $f(x)$ есть *o-малое* от функции $g(x)$ при $x\to\omega$ (обозначение: