и поэтому её расходимость вытекает из критерия Коши: достаточно положить $\varepsilon = 1$, и для произвольного $N \in \mathbb{N}$ выбрать $n = N + 1$, $m = N + 2$.

С помощью критерия Коши можно также доказать расходимость последовательности из задачи 3.155. Для любого натурального N найдём такое $k \in \mathbb{N}$, что $n_k = [2\pi k] + 1 > N + 1$, и положим $n = n_k - 1$, $m = n_k + 1$. Тогда

$$\sin m - \sin n = \sin(n_k + 1) - \sin(n_k - 1) = 2\sin 1 \cdot \cos n_k > 2\sin 1 \cos 1 = \sin 2,$$

так как $2\pi k < n_k < 2\pi k + 1$. Итак, если $\varepsilon = \sin 2 > 0$, то для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдутся такие n и m, что $n, m > N$ и $|\sin m - \sin n| \geqslant \varepsilon$. Значит, последовательность $(\sin n)$ не фундаментальна, поэтому расходится в силу критерия Коши.

Переформулируем критерий Коши сходимости последовательности.

Критерий Коши сходимости ряда. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *найдётся такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что для любых натуральных чисел* m *и* n, $n > m > N(\varepsilon)$, *справедливо неравенство* $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.

Приведем формальную запись критерия Коши сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall m, n > N, n > m, \text{ имеем } \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Задача 3.347. Пусть $|a_n| \leqslant b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ также сходятся.

Решение. Запишем условие Коши сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N, n > N, \text{ имеем } \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon.$$

Поскольку $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k$, выполняется также и условие Коши сходимости каждого из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. □

§ 3.7. Подпоследовательности и частичные пределы

Определение. Пусть даны возрастающая последовательность натуральных чисел: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и последовательность (a_n). Последовательность (b_k), где $b_k = a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, называется *подпоследовательностью* последовательности (a_n) и обозначается (a_{n_k}).

Задача 3.366. Что из перечисленного является подпоследовательностью последовательности (a_n), $a_n = (-1)^{n+1} n$? Ответ обосновать.

а) $(1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-1, 2k+1, \ldots)$; б) $(3, 1, 5, 7, \ldots, 2k+1, 2k-1, \ldots)$;

в) $\left(-2, -2, -4, -4, \ldots, -2\left[\dfrac{k+1}{2}\right], \ldots\right)$;

г) $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ (расположенная по возрастанию последовательность простых чисел).

Решение. а) Является, поскольку $b_k = a_{2k-1}$; соответствующая возрастающая последовательность (n_k) представляет собой последовательность нечётных чисел, $n_k = 2k-1$.

б) Не является, потому что нарушен порядок следования членов: члены вида $b_{2k-1} = 4k-1$, $b_{2k} = 4k-3$ в исходной последовательности (a_n) идут в обратном порядке.

в) Не является, так как последовательность (b_k) содержит по два члена с одинаковым значением, а последовательность (a_n) — только один такой член.

г) Не является, так как число 2 не входит в последовательность (a_n). $\square$

Теорема Больцано — Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Определение. Число l называется *частичным пределом* последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, если существует её подпоследовательность $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к числу l.

Из определения предела вытекает следующее утверждение: если последовательность сходится к числу a, то любая её подпоследовательность также сходится к числу a. Следовательно, любая сходящаяся последовательность имеет ровно один частичный предел, совпадающий с её обычным пределом.

Теорема. *Множество всех частичных пределов всякой последовательности замкнуто.*

Определение. Символ $+\infty$ $(-\infty)$ называется *бесконечным частичным пределом* последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, если существует такая подпоследовательность $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ $(\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty)$.

Любая последовательность имеет по крайней мере один частичный предел — число или символ. Между символами $+\infty$, $-\infty$ и действительными числами принимается соотношение порядка: $\forall r \in \mathbb{R}$ имеем $-\infty < r < +\infty$. Тогда можно показать, что множество частичных пределов всякой последовательности не пусто и содержит максимальный и минимальный элемент (может быть, несобственный, т. е. символ $+\infty$ или $-\infty$).

Определение. Максимальный частичный предел последовательности (a_n) называется её *верхним пределом* и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Минимальный частичный предел последовательности называется её *нижним пределом* и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Задача 3.379. Найти верхний и нижний пределы последовательности (a_n), $a_n = n^{(-1)^{n+1}}$.

Решение. Так как $a_n > 0$, любой частичный предел этой последовательности неотрицателен. Поскольку $a_{2n-1} = 2n-1$ и $a_{2n} = \dfrac{1}{2n}$, получаем $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$. $\square$

Задача 3.389. Найти верхний и нижний пределы последовательности (a_n),

$$a_n = \left(2 + \cos\frac{\pi n}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{6}\right).$$

Решение. Поскольку $a_n \leqslant 3\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$ при всех n, получаем, с одной стороны, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant 3$, а с другой стороны, $a_{12k} = 3\Big(1+\dfrac{1}{12k}\Big)$, $k \in \mathbb{N}$, следовательно $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. Точно так же из соотношений $a_n \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$ и $a_{6k+3} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. □

Задача 3.402. Пусть $(a_n) = \overline{(b_1, \ldots, b_m)}$ — периодическая последовательность. Доказать, что множество частичных пределов последовательности (a_n) совпадает с множеством всех различных элементов из набора $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Решение. Любое число из $b_1, b_2, \ldots, b_m$ является частичным пределом последовательности (a_n), так как её подпоследовательность $(a_{n_k}) = (a_{j+km})$ постоянна: $a_{j+km} = b_j$ при всех $j = 1, \ldots, m$ и $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, только постоянные подпоследовательности периодической последовательности сходятся (проверьте!), поэтому других частичных пределов последовательность (a_n) не имеет. □

Задача 3.409. Пусть $0 < p < q$ и $\alpha = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь. Найти множество частичных пределов последовательности (a_n), если $a_n = \{\alpha n\}$.

Решение. По условию $a_n = \Big\{\dfrac{pn}{q}\Big\}$. Числа $p, 2p, \ldots, qp$ дают различные остатки при делении на q (проверьте!), поэтому значения a_n при $n = 1, 2, \ldots, q$ равны в некотором порядке $0, \dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}, \ldots, \dfrac{q-1}{q}$, а далее периодически повторяются с периодом q. Следовательно, каждое из этих чисел является частичным пределом последовательности (a_n), и других частичных пределов нет. □

Теорема. *Ограниченная последовательность (a_n) сходится тогда и только тогда, когда $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Таким образом, последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её частичных пределов состоит ровно из одной точки.

Задача 3.414. а) Доказать, что число l является частичным пределом последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда в любой ε-окрестности точки l на числовой прямой содержится бесконечно много членов последовательности (a_n).

б) Доказать, что если множество значений последовательности (a_n) *всюду плотно* на отрезке $[a; b]$, т. е. на любом интервале, содержащемся в этом отрезке, есть хотя бы один элемент последовательности (a_n), то все точки отрезка $[a; b]$ являются частичными пределами последовательности (a_n).

Решение. а) Если число l является частичным пределом последовательности (a_n), то найдётся сходящаяся к l подпоследовательность этой последовательности. Поэтому во всякой ε-окрестности точки l на числовой прямой содержатся все члены этой подпоследовательности начиная с некоторого номера, а значит, содержится и бесконечно много членов последовательности (a_n).

Обратно, пусть известно, что в любой ε-окрестности точки l на числовой прямой содержится бесконечно много членов последовательности (a_n).

Построим сходящуюся к l подпоследовательность этой последовательности. Возьмём 1-окрестность точки l и выберем в ней элемент a_{n_1}. Затем рассмотрим 1/2-окрестность точки l и выберем в ней элемент a_{n_2}, где $n_2 > n_1$. Продолжая процесс далее, построим такую подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n), что $|a_{n_k} - l| < \dfrac{1}{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Этот процесс не остановится ни на каком шаге, так как из бесконечного множества элементов последовательности во всякой ε-окрестности точки l всегда можно выбрать элемент с номером большим любого наперёд заданного числа. Остаётся заметить, что построенная подпоследовательность (a_{n_k}) сходится к числу l.

б) Достаточно доказать, что в любой ε-окрестности всякой точки l отрезка $[a; b]$ содержится бесконечно много членов последовательности (a_n). Рассмотрим такую ε-окрестность и выберем в ней счётную систему непересекающихся интервалов. Например, для $l \in [a; b)$ можно выбрать интервалы $\left(l; l + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $\left(l + \dfrac{\varepsilon}{2}; l + \dfrac{3\varepsilon}{4}\right)$ и т. д. В каждом таком интервале есть хотя бы один элемент последовательности (a_n), причём все эти элементы различны для разных интервалов. Утверждение доказано. □

Задача 3.417. Пусть подпоследовательности $(a_k^1), \ldots, (a_k^s)$, $s \in \mathbb{N}$, последовательности (a_n) содержат все её члены и сходятся к различным числам $l_1, \ldots, l_s$ соответственно. Доказать, что множество частичных пределов последовательности (a_n) есть $\{l_1, \ldots, l_s\}$. Верно ли аналогичное утверждение для счётного множества подпоследовательностей?

Решение. Из условия вытекает, что каждое из чисел $l_1, \ldots, l_s$ является частичным пределом последовательности (a_n). Докажем, что других частичных пределов эта последовательность не имеет. Приведём два способа рассуждений.

Первый способ. Воспользуемся результатом задачи 3.414. Пусть точка l на числовой прямой отлична от точек $l_1, \ldots, l_s$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестности точек $l, l_1, \ldots, l_s$ не пересекаются. Подпоследовательности $(a_k^1), \ldots, (a_k^s)$, $s \in \mathbb{N}$, последовательности (a_n) содержат все её члены и сходятся к числам $l_1, \ldots, l_s$ соответственно, следовательно, в объединении ε-окрестностей точек $l_1, \ldots, l_s$ содержатся все члены последовательности (a_n) начиная с некоторого номера. Это означает, что в ε-окрестности точки l лежит не более чем конечное число элементов последовательности (a_n), а значит, число l не может быть её частичным пределом.

Второй способ. Рассмотрим произвольную подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n). Возможны два случая:

1) начиная с некоторого номера k_0 все члены последовательности (a_{n_k}) содержатся в множестве значений последовательности $(a_m^{s_0})$, $1 \leqslant s_0 \leqslant s$;

2) для любого $k_0 \in \mathbb{N}$ найдутся номера $i, j > k_0$, для которых элементы a_{n_i} и a_{n_j} принадлежат двум разным последовательностям из набора $(a_k^1), \ldots, (a_k^s)$.

В первом случае $(a_{n_k})_{k=k_0}^{\infty}$ — это подпоследовательность последовательности $(a_m^{s_0})_{m=1}^{\infty}$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = l_{s_0}$. Во втором случае $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ не существует (проверьте!). Следовательно, если последовательность (a_{n_k}) сходится, то только к одному из чисел $l_1, \ldots, l_s$.

В заключение заметим, что последовательность

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right),$$

можно разбить на счётное множество постоянных подпоследовательностей, множество пределов которых не содержит число 0, являющееся частичным пределом последовательности (a_n), поэтому для счётного множества подпоследовательностей аналогичное утверждение неверно. □

Задача 3.427. Доказать, что для ограниченных последовательностей (a_n) и (b_n) справедливо неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

Решение. Обозначим $\underline{a} = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\overline{a} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

1. Поскольку $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N$ имеем $a_n < \overline{a} + \frac{\varepsilon}{2}$ и $b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$, то $\forall n > N$ получаем $a_n + b_n < \overline{a} + b + \varepsilon$, следовательно, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \overline{a} + b$.

2. Выделим подпоследовательность (b_{n_k}), сходящуюся к b. Из ограниченной подпоследовательности (a_{n_k}) выделим сходящуюся подпоследовательность $(a_{n_{k_p}})$. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \lim_{p\to\infty}(a_{n_{k_p}} + b_{n_{k_p}}) = \lim_{p\to\infty} a_{n_{k_p}} + \lim_{p\to\infty} b_{n_{k_p}} \geqslant \underline{a} + b. \qquad \square$$

Ни один из знаков неравенства в рассмотренной задаче, вообще говоря, нельзя заменить на знак равенства. Например, для последовательностей (a_n), $a_n = (-1)^n$, и (b_n), $b_n = (-1)^{n+1}$, имеем $a_n + b_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$0 = 1 + (-1) = \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} a_n < \varlimsup_{n\to\infty}(a_n + a_n) = 2,$$

$$0 = \varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n = 2.$$

Задача 3.438. Найти множество частичных пределов последовательности (a_n), $a_n = \{\alpha n\}$, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Решение. Число α иррационально, поэтому $\{-\alpha n\} = 1 - \{\alpha n\}$ при всех n (см. задачу 1.308), а значит, достаточно рассмотреть случай $\alpha > 0$. Далее, при всех n справедлива оценка $0 < \{\alpha n\} < 1$, следовательно, вне отрезка $[0; 1]$ частичных пределов эта последовательность иметь не может.

Заметим, что все элементы $\{\alpha n\}$ данной последовательности различны. В самом деле, если при $k \neq l$ имеем $\{\alpha k\} = \{\alpha l\}$, то для некоторого целого числа q справедливо равенство $\alpha k = q + \alpha l$, откуда $\alpha = \frac{q}{k-l}$, что противоречит иррациональности числа α.

Покажем, что частичным пределом данной последовательности является любое число из отрезка $[0; 1]$. В силу задачи 3.414 для этого достаточно доказать, что на всяком интервале, лежащем в отрезке $[0; 1]$, есть хотя бы один элемент последовательности. Если мы докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число m, что $\{\alpha m\} < \varepsilon$, то задача будет решена.

В самом деле, тогда если s — наибольшее натуральное число, для которого все числа $\{\alpha m\}, 2\{\alpha m\}, \ldots, s\{\alpha m\}$ лежат на отрезке $[0; 1]$, то эти числа равны $\{\alpha m\}, \{\alpha \cdot 2m\}, \ldots, \{\alpha sm\}$, а значит, являются членами исходной последовательности. С другой стороны, выбирая ε меньше длины рассматриваемого интервала, получим, что хотя бы одно из этих чисел попало в этот интервал.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и натуральное число N таково, что $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Каждое из $N+1$ чисел $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}, \{(N+1)\alpha\}$ принадлежит интервалу $(0; 1)$, поэтому среди них найдутся два числа на расстоянии, меньшем $\dfrac{1}{N}$:

$$0 < \{k\alpha\} - \{l\alpha\} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Согласно задаче 1.308 получаем $\{k\alpha\} - \{l\alpha\} = \{(k-l)\alpha\}$. Значит, если $k > l$, то в качестве m можно взять число $k - l$. Если же $k < l$, то положим $m' = l - k > 0$, тогда $\{-m'\alpha\} < \varepsilon$, т. е. $-m'\alpha = z + \delta$, где $z \in \mathbb{Z}$, $0 < \delta < \varepsilon$. Выберем натуральное число p так, что $p\delta < 1$, но $(p+1)\delta > 1$. Тогда $\{pm'\alpha\} = \{-pz - p\delta\} = \{-p\delta\} = 1 - p\delta < \delta < \varepsilon$, и в качестве m можно взять число pm'. $\square$

Задачи

Задать последовательность явным и рекуррентным образом (3.3—3.12).