Система всех подмножеств данного множества A обозначается через 2^A. Например, $2^{\{0,1\}} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

§ 2.4. Отображения и функции

Пусть X и Y — некоторые множества. Если по какому-то закону каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие ровно один элемент $y \in Y$, то говорят, что задано *отображение* f из множества X в множество Y, и пишут $f\colon X \to Y$. Для любого $x \in X$ соответствующий элемент y называется *образом элемента* x и обозначается $f(x)$. *Образом множества* $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество всех образов $y \in Y$, соответствующих каждому $x \in A$, и обозначается $f(A)$, т. е. $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A\colon f(x) = y\}$. Для $y \in Y$ множество всех $x \in X$, для которых $f(x) = y$, называется (*полным*) *прообразом* y и обозначается $f^{-1}(y)$. Если $y_0 = f(x_0)$, то $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, но множество $f^{-1}(y_0)$ может содержать и отличные от x_0 элементы $x \in X$. Аналогично для данного множества $B \subset Y$ множество прообразов всех элементов $y \in B$ называется (*полным*) *прообразом множества* B и обозначается $f^{-1}(B)$, т. е. $f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}$.

В главе 1 рассматривались числовые функции — отображения $f\colon X \to Y$, для которых X и Y — числовые множества. Обычно вместо термина «отображение» используют слово «функция» тогда, когда числовым является множество Y. Вообще, в зависимости от природы множеств X и Y в математике используются и другие синонимы слова отображение: функционал, оператор, преобразование и др. В настоящем пособии мы будем пользоваться понятиями «отображение» и «функция»: первым, если хотим подчеркнуть универсальность рассматриваемого утверждения, и вторым, если ограничиваемся отображениями числовых множеств. Говоря об отображениях, нередко пользуются и введёнными для функций $f\colon X \to Y$ понятиями *область* (или *множество*) *определения* (множество X), *аргумент* (элемент $x \in X$), *область* (или *множество*) *значений* (множество $f(X)$), *значение* (элемент $y \in f(X)$). Напомним, что областью определения функции, заданной формулой, считается область допустимых значений её аргумента (т. е. всех значений, при которых формула имеет смысл).

Задача 2.136. Пусть $f(x) = x^2$. Найти

1) образ множества: а) $[0; 1]$, б) $(-1; 1]$, в) $[-1; 0{,}5)$;

2) прообраз множества: а) $[0; 1]$, б) $(a; b]$, $a > 0$, в) $[-1; 1]$.

Решение. 1) Если переменная x пробегает отрезок $[0; 1]$, то x^2 также пробегает отрезок $[0; 1]$, поэтому в силу чётности функции f во всех трёх случаях образом заданного множества является отрезок $[0; 1]$.

2) а) Прообразом отрезка $[0; 1]$ является множество всех таких чисел x, что $x^2 \in [0; 1]$, т. е. отрезок $[-1; 1]$.

б) Прообразом полуинтервала $(a; b]$, $a > 0$, является множество

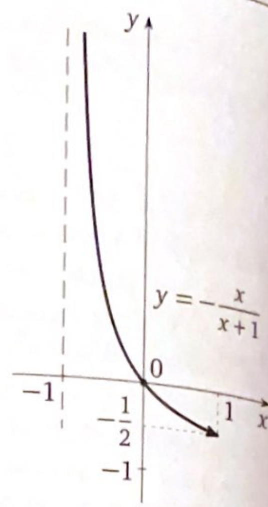
$$f^{-1}((a; b]) = [-\sqrt{b}; -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}; \sqrt{b}].$$

в) Поскольку $[-1; 1] = [-1; 0) \cup [0; 1]$ и прообраз полуинтервала $[-1; 0)$ пуст, а прообраз отрезка $[0; 1]$ уже найден, получаем ответ: $[-1; 1]$. □

Задача 2.138. Пусть функция $f\colon (-1;\,1) \to (-1;\,+\infty)$ задана формулой $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$. Пользуясь графиком этой функции, найти

1) образ множества: а) $(-1;\,1)$, б) $(-1;\,0]$;

2) прообраз множества: а) $[0;\,1]$, б) $[-1;\,-0{,}5]$.



Решение. Поскольку $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1$, функция f убывает на всей области определения; её график представлен на рисунке.

1) Образом интервала $(-1;\,1)$ является луч $(-0{,}5;\,+\infty)$, а образом полуинтервала $(-1;\,0]$ — луч $[0;\,+\infty)$.

2) Решая неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, находим прообраз отрезка $[0;\,1]$: отрезок $[-0{,}5;\,0]$. Прообраз отрезка $[-1;\,-0{,}5]$ пуст, так как множество значений функции f есть луч $(-0{,}5;\,+\infty)$, не имеющий общих точек с этим отрезком. □

Множество всех отображений $f\colon X \to Y$ обозначается через Y^X. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъекцией* (отображением X *в* Y), если различным элементам $x \in X$ соответствуют различные элементы $y \in Y$, т.е. $\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$; *сюръекцией* (отображением X *на* Y), если $f(X) = Y$, т.е. $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X\colon f(x) = y$; *биекцией*, или *взаимно однозначным соответствием*, если f одновременно инъективно и сюръективно. Если отображение $f\colon X \to Y$ является биекцией, то определено обратное отображение $f^{-1}(y)$, соотносящее каждому $y \in Y$ такое $x \in X$, что $f(x) = y$. *Тождественное отображение* $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, определяемое для всех $x \in X$ равенством $\mathrm{id}_X(x) = x$, также является биекцией.

Задача 2.140. Пусть $f(x) = x^2$. Для каждой из следующих функций выяснить, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией, если

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) $f\colon \mathbb{R} \to [0;\,+\infty)$; в) $f\colon [0;\,+\infty) \to [0;\,+\infty)$;
г) $f\colon [0;\,+\infty) \to \mathbb{R}$; д) $f\colon [0;\,1] \to [0;\,1]$; е) $f\colon [-1;\,0] \to [0;\,1]$.

Решение. а) Функция не является инъекцией, например, потому что её значения в точках -1 и 1 совпадают. Функция также не является сюръекцией, например, потому что уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в её области определения.

б) Функция не является инъекцией, но уже является сюръекцией, так как уравнение $x^2 = a$ разрешимо для любых неотрицательных значений a.

в) Функция строго возрастает, поэтому является инъекцией, а поскольку она есть сюръекция, значит, перед нами биекция.

г) Функция строго возрастает и является инъекцией, но сюръекцией уже не является: множество её значений не совпадает с $\mathbb{R}$.

д) Функция ставит в соответствие каждому числу отрезка $[0;\,1]$ квадрат этого числа, также принадлежащий отрезку $[0;\,1]$, при этом квадраты различных чисел различны и заполняют весь отрезок $[0;\,1]$. Следовательно, функция является биекцией.

е) Функция строго убывает, поэтому является инъекцией. Кроме того, поскольку для всякого $a \in [0; 1]$ существует решение уравнения $x^2 = a$, принадлежащее отрезку $[-1; 0]$, функция также является сюръекцией, а значит, и биекцией. □

Задача 2.144. Пусть отображение $f\colon X \to Y$ — инъекция. Докажем, что если $A \subset X$ и $B \subset X$, то $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Решение. Если $y \in f(A \cap B)$, то $\exists x \in A \cap B\colon f(x) = y$. Поскольку $x \in A$, имеем $y \in f(A)$. Одновременно $x \in B$, поэтому $y \in f(B)$. Значит, $y \in f(A) \cap f(B)$.

Обратно: если $y \in f(A) \cap f(B)$, то $y \in f(A)$ и $y \in f(B)$, поэтому $\exists x_1 \in A\colon f(x_1) = y$ и $\exists x_2 \in B\colon f(x_2) = y$. Но поскольку f инъекция, т.е. различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y, получаем, что $x_1 = x_2 = x \in A \cap B$. Значит, $y \in f(A \cap B)$. □

Если заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$, то отображение $h\colon X \to Z$, определяемое равенством $h(x) = g(f(x))$ называется *композицией* отображений f и g и обозначается выражением $h = g \circ f$. Композиции элементарных функций уже встречались ранее при построении эскизов их графиков (см. § 1.9).

Задача 2.150. Пусть заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Доказать, что

а) если f и g — инъекции, то $g \circ f$ — инъекция;

б) если f и g — сюръекции, то $g \circ f$ — сюръекция;

в) если f и g — биекции, то $g \circ f$ — биекция.

Решение. а) Поскольку $\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$ и $f(x_1), f(x_2) \in Y$, а $\forall\, y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, имеем $g(y_1) \neq g(y_2)$, выбирая $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, получаем, что $\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, справедливо неравенство $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, т. е. $g \circ f$ — инъекция.

б) Поскольку $\forall\, z \in Z\ \exists\, y \in Y\colon g(y) = z$ и $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X\colon f(x) = y$, заключаем, что $\forall\, z \in Z\ \exists\, x \in X\colon g(f(x)) = z$, т. е. $g \circ f$ — сюръекция.

в) Утверждение следует из предыдущих двух. □

Если отображение $f\colon X \to Y$ является взаимно однозначным, то существует отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, называемое *обратным* к отображению f и определяемое равенством $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$. В этом случае отображение $f\colon X \to Y$ также является обратным к отображению f^{-1} и справедливо равенство $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Задача 2.153. Пусть заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$. Доказать, что если $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{id}_X$, то отображения f и g — биекции и взаимно обратны.

Решение. Достаточно показать, что f — биекция. Если элементы $x_1, x_2 \in X$ таковы, что $f(x_1) = f(x_2)$, то получаем $x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$, значит, f — инъекция. Далее, поскольку $f(g(Y)) = Y$ и $g(Y) \subset X$, заключаем, что f — сюръекция. □