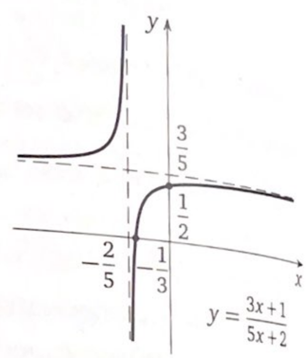
плоскости, сдвинутую вдоль оси Ox на величину $\left|\frac{d}{c}\right|$ вправо или влево, а также вдоль оси Oy на величину $\left|\frac{a}{c}\right|$ вверх или вниз, где направления выбираются в зависимости от знаков дробей под модулями. Отсюда немедленно вытекают свойства графика дробно-линейной функции как геометрического объекта на координатной плоскости:

- симметрия *ветвей* гиперболы относительно точки с координатами $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$;
- наличие у графика горизонтальной асимптоты $x = -\frac{d}{c}$ и вертикальной асимптоты $y = \frac{a}{c}$ (см. задачу 1.234);
- выпуклость ветвей гиперболы вверх или вниз в зависимости от выбора ветви и знака числа k (см. задачу 1.235).

При построении гиперболы бывает удобно сначала построить её асимптоты (если асимптоты отличны от осей координат, то их изображают пунктирной линией), а затем, считая асимптоты осями координат новой координатной системы $x'Oy'$, построить в них гиперболу $y' = \frac{k}{x'}$. Кроме того, полезно отмечать точки пересечения гиперболы с исходными осями координат.

Задача 1.227. Построить график функции $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x+2}$.



Решение. Асимптотами гиперболы являются прямые $x = -\frac{2}{5}$ и $y = \frac{3}{5}$. Число $k = \dfrac{1\cdot 5 - 3\cdot 2}{5^2} = -\dfrac{1}{25}$ сравнительно мало по модулю, поэтому при построении удобнее опираться на точки пересечения гиперболы с осями координат: $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. При этом одна из ветвей гиперболы лежит в четвёртой четверти относительно асимптот, а вторая ветвь, симметричная первой, лежит относительно них во второй четверти. График функции приведён на рисунке. □

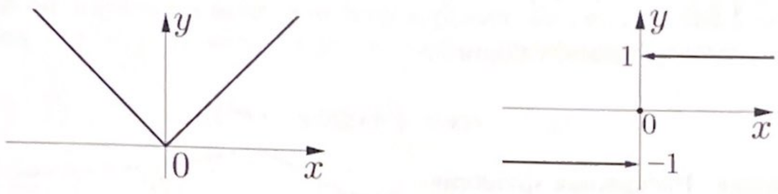
§ 1.4. Кусочно заданные функции

Если область определения функции является объединением промежутков, и, возможно, отдельных точек, причём функция задана на каждом из этих промежутков и в каждой из этих точек отдельной формулой, то говорят, что функция задана *кусочно*. При кусочном задании функции особое внимание следует уделять значению точек, «разделяющих» промежутки задания функции различными формулами. Значение функции в такой точке можно задать одной из указанных формул (а иногда даже обеими), а можно определить и независимым образом. От этого выбора, как правило, зависит непрерывность или характер разрыва задаваемой функции, что будет подробно обсуждаться далее в гл. 4 (в этом параграфе все упоминания непрерывности, разрывов функций и касательных к их графикам носят неформальный характер).

Например, важные функции модуль и знак числа (последнюю в речи нередко называют функцией *сигнум*[20]) определяют равенствами

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

причём значение в точке $x_0 = 0$ для функции модуль может быть задано любой из двух формул (и даже обеими), действующих на отрицательных и положительных аргументах соответственно, а для функции знак, напротив, включение точки x_0 в область действия любой из соответствующих формул приведёт к противоречию. Графики функций модуль и знак приведены на рисунке.



Функция знак кусочно-постоянная, а модуль — кусочно-линейная. Два этих класса кусочно задаваемых функций оказываются особенно полезными в приложениях. Отметим также, что функция $f(x) = |x|$ элементарная (так как представляется в виде композиции основных элементарных функций равенством $f(x) = \sqrt{x^2}$), в то время как функция $g(x) = \operatorname{sgn} x$ элементарной не является в силу непрерывности всякой элементарной функции в каждой точке своей области определения (см. с. 110 издания 2017 г.).

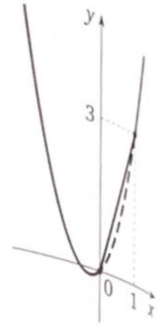
При построении графика функции, в аналитическое выражение которой входят функции модуль или знак, наиболее естественно перейти к кусочному заданию в явной форме, то есть выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля или сигнума не меняет знака, а значит, от знаков модуля и сигнума на этих промежутках можно избавиться (как говорят, *раскрыть* модули и знаки) в соответствии с определением. Отметим два типичных свойства получающихся в результате графиков. Функция $f(x) = |x|$ непрерывная, однако её график не имеет в нуле касательной (такие точки на графике часто называют *угловыми*), так что у композиции с этой функцией непрерывность сохранится, однако на графике могут появиться угловые точки. Нередко именно в таких точках у функции появляются локальные экстремумы. Функция $g(x) = \operatorname{sgn} x$ и вовсе разрывна в нуле, так что и у композиции с этой функцией могут появиться точки разрыва.

Для сокращения записи кусочного задания функции часто не используют фигурную скобку, а перечисляют формулы в строчку, как это сделано при решении следующей задачи.

[20] От лат. *signum* — «знак».

Задача 1.248. Раскрывая каждый модуль в формуле по определению, построить график функции

$$f(x) = x^2 + 2x + |x^2 - x|.$$

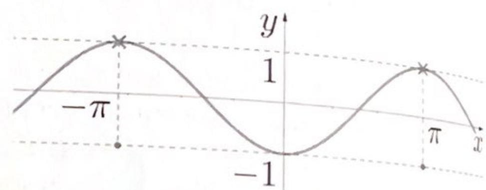


Решение. Разность $(x^2 - x)$ отрицательна при всех значениях x из интервала $(0; 1)$ и неотрицательна при всех остальных значениях x. Из этого следует, что $f(x) = 2x^2 + x = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, если $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 1$, и $f(x) = 3x$, если $0 < x < 1$. Таким образом, график функции представляет собой параболу, участок которой между точками с абсциссами 0 и 1 заменён на отрезок, соединяющий соответствующие точки. График функции приведён на рисунке. ☐

Задача 1.265. Раскрывая каждую функцию знак в формуле по определению, построить график функции

$$f(x) = \cos(x + \pi \operatorname{sgn}(x^2 - \pi^2)).$$

Решение. Раскрывая функцию знак по определению, получаем, что $g(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - \pi^2) = 1$, если $|x| > \pi$, $g(x) = -1$, если $|x| < \pi$, и, наконец, $g(x) = 0$, если $x = \pm\pi$. Из определения тригонометрических функций



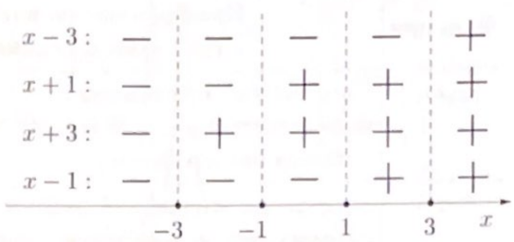
следуют равенства $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x$, а значит, $f(x) = -\cos x$ для всех $x \neq \pm\pi$, а в точках $x = \pm\pi$ функция f принимает значение $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$. График функции приведён на рисунке. ☐

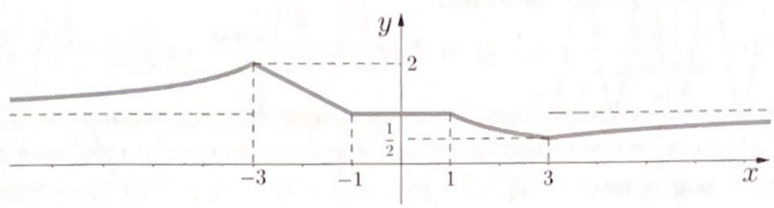
Как уже отмечалось ранее, при построении графика кусочно заданной функции часто естественным образом обнаруживаются экстремумы последней. В таких случаях строгое обоснование наличия и типа экстремума сводится к указанию на известный характер монотонности функции вокруг рассматриваемой точки (при этом нередко помогают результаты задач 1.116, 1.117 и 1.118) и общий результат задачи 1.112.

Задача 1.280. Раскрывая каждый модуль в формуле по определению, построить график функции $f(x) = \dfrac{|x-3| + |x+1|}{|x+3| + |x-1|}$. Найти точки экстремума функции и определить их характер.

Решение. Несмотря на то, что формально четыре встречающихся в аналитическом выражении функции модуля можно раскрыть $2^4 = 16$ возможными способами, в реальности для большей их части условия раскрытия окажутся несовместными. Например, если для некоторого аргумента x выражение $x - 3$ является положительным, то в этом случае выражения под всеми тремя оставшимися модулями также неизбежно оказываются положительными, а значит, скажем, формула $\dfrac{x - 3 + x + 1}{-x - 3 - x + 1}$ не задаёт значение функции ни для какого аргумента x.

Чтобы наглядно систематизировать все реализующиеся способы раскрытия модулей, на практике используют схемы, подобные изображённой на рисунке, где знаками «+» и «−» обозначены знаки соответствующих выражений на отмеченных промежутках числовой прямой. Подчеркнём, что, как отмечали ранее при определении функции модуль, «разделяющие» прямую точки можно приписывать сразу к обоим способам его раскрытия для упрощения выкладок[21]. Используя схему и приводя подобные слагаемые (восстановите детали самостоятельно!), получаем, что $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, если $x \leqslant -3$ или $x \geqslant 3$, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, если $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $f(x) = 1$, если $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, и, наконец, $f(x) = \frac{2}{x+1}$, если $1 \leqslant x \leqslant 3$. График функции приведён на рисунке.





Согласно результатам задач 1.116 и 1.118, функция f на отрезках $[-3; -1]$ и $[1; 3]$ совпадает с убывающими линейной и, соответственно, дробно-линейной функциями, на лучах $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$ функция f совпадает с возрастающей дробно-линейной функцией, а на отрезке $[-1; 1]$ функция f является постоянной. Отметим также, что, согласно результату задачи 1.234, функция f имеет на бесконечности горизонтальную асимптоту $y = 1$. Отсюда с учётом определения экстремумов и результата задачи 1.112 получаем, что точка $x_{\max} = -3$ является точкой строгого глобального максимума функции f со значением $f(x_{\max}) = 2$; точка $x_{\min} = 3$ является точкой строгого глобального минимума функции f со значением $f(x_{\min}) = \frac{1}{2}$; наконец, каждая точка $x \in (-1; 1)$ является точкой нестрого локального экстремума (и минимума, и максимума) со значением 1 (объясните самостоятельно, почему вместо интервала $(-1; 1)$ в последнем утверждении нельзя использовать соответствующий отрезок с теми же концами). □

В ряде случаев гораздо удобнее вместо громоздкого анализа всех вариантов раскрытия модуля получить искомый график функции при помощи цепочки преобразований графиков основных элементарных функций, подобно тому, как это делалось в §1.3. Ниже в таблице описаны преобразования, которые позволяют из графика функции f получить график функции $g(x) = |f(x)|$ или $g(x) = f(|x|)$.

[21] А также самопроверки: одна и та же очередная потенциальная угловая точка должна получаться при приписывании аргумента, обнуляющего подмодульное выражение, к способам раскрытия модуля и «слева», и «справа».

Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком функции f на плоскости xOy
$\lvert f(x)\rvert$	Симметричное отражение части графика, лежащей в области $y<0$ (ниже оси Ox), относительно оси Ox; часть графика, лежащая в области $y\geqslant 0$, остаётся без изменения
$f(\lvert x\rvert)$	Замена части графика, лежащей в области $x<0$ (слева от оси Oy), на симметрично отражённую относительно оси Oy часть графика, расположенную в области $x>0$ (справа от оси Oy); часть графика, лежащая в области $x\geqslant 0$, остаётся без изменения

Особой аккуратности, как и ранее в § 1.3, требует выбор порядка геометрических преобразований при комбинировании операций взятия модуля аргумента функции и прибавления к аргументу числа. Например, график функции $g(x)=f(|x-1|-2)$ получается из графика функции f с помощью двух операций сдвига и одной операции симметричного отражения части графика с заменой, причём порядок выполнения этих операций должен соответствовать следующей цепочке:

$$f(x)\xrightarrow[\text{на 2 вправо}]{\text{сдвиг}} f(x-2)\to f(|x|-2)\xrightarrow[\text{на 1 вправо}]{\text{сдвиг}} f(|x-1|-2).$$

При выполнении же указанных геометрических преобразований в других возможных порядках из графика функции f можно получить графики функций, задаваемых формулами $f(|x|-3)$, $f(|x-2|-1)$ и $f(|x-3|)$ (восстановите все необходимые детали!). Как и ранее, на практике верную цепочку преобразований гораздо удобнее строить (и записывать) с конца.

Задача 1.300. Используя геометрические преобразования, построить график функции $f(x)=\log_{1/2}\Big|1-2\big||x|-1\big|\Big|$. Найти точки экстремума функции и определить их характер.

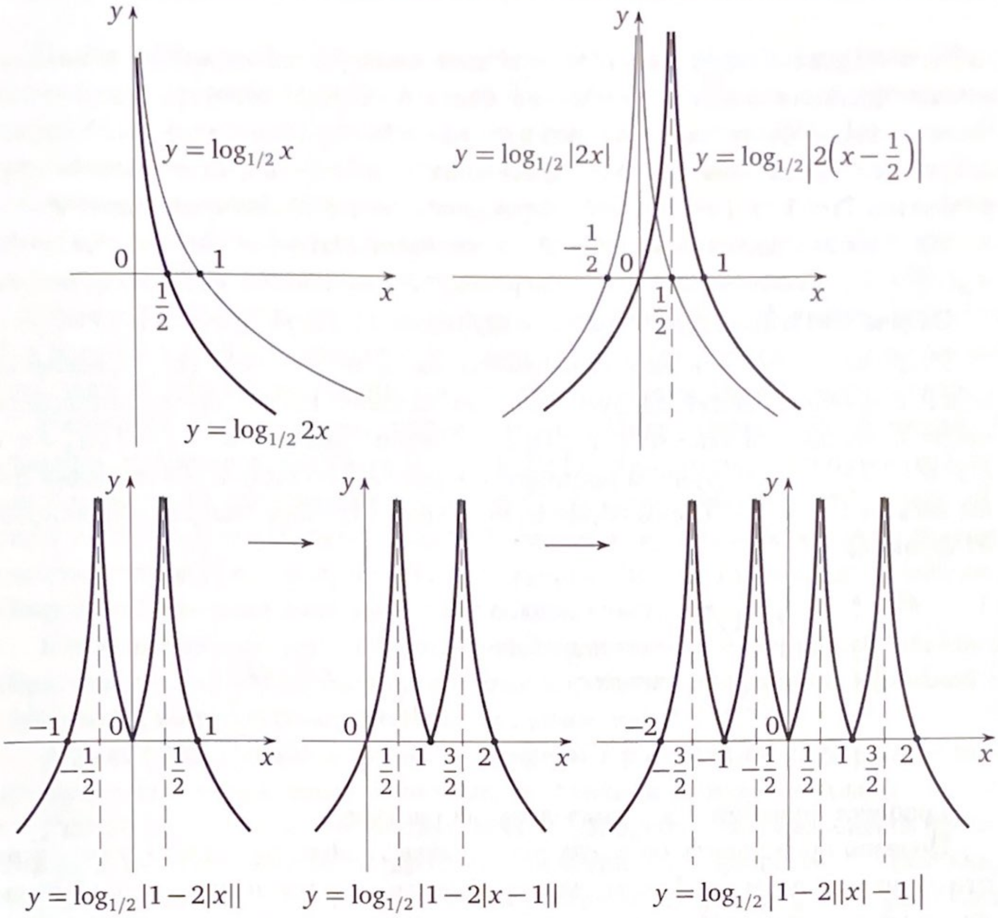
Решение. В первую очередь отметим, что на всей области определения функции верно равенство $f(x)=\log_{1/2}\Big|2\big||x|-1\big|-1\Big|$. Используя обратный ход, будем по очереди отбрасывать из полученного выражения операции, произведённые с аргументом функции по одной, формируя обратную цепочку преобразований:

$$\log_{\frac12}\Big|2\big||x|-1\big|-1\Big| \leftarrow \log_{\frac12}\big|2|x-1|-1\big| \xleftarrow[\text{на 1 вправо}]{\text{сдвиг}} \log_{\frac12}\big|2|x|-1\big| \leftarrow$$

$$\leftarrow \log_{\frac12}|2x-1| = \log_{\frac12}\left|2\left(x-\frac12\right)\right| \xleftarrow[\text{на } \frac12 \text{ вправо}]{\text{сдвиг}} \log_{\frac12}|2x| \leftarrow \log_{\frac12}2x \leftarrow \log_{\frac12}x.$$

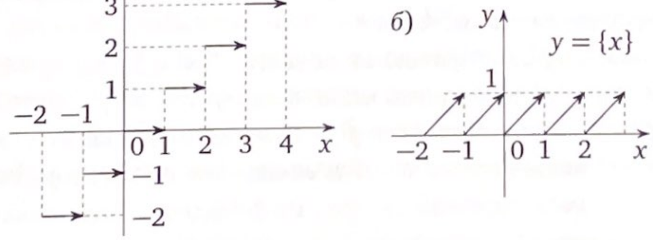
Этапы построения графика приведены на рисунках ниже.

В силу строгого убывания функции $l(x)=\log_{1/2}x$ на всей области определения и вида применяемых геометрических преобразований последовательно обосновывается характер монотонности функции f на каждом из промежутков, на которые числовая прямая оказалась разделена точками $\pm\frac32$, ±1, $\pm\frac12$ и 0. Отсюда с учётом результата задачи 1.112 получаем, что точки ±1, $\pm\frac12$ и 0 являются точками строгого локального минимума функции f



с нулевым значением. При этом глобального минимума и хотя бы локальных максимумов у функции f нет. □

В заключение настоящего параграфа обсудим ещё две важные функции. Напомним, что для каждого числа $x \in \mathbb{R}$ его *целой частью* называется наибольшее целое число, не превосходящее x, а *дробной частью* — разность между числом x и его целой частью. Целая и дробная части числа x обозначаются через $[x]$ и $\{x\} = x - [x]$ соответственно. Графики функций целой и дробной частей приведены на рисунке.

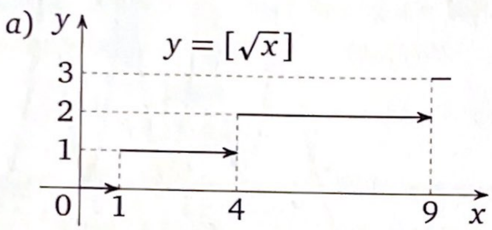


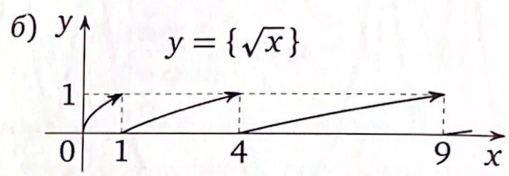
Например, справедливы равенства $[\pi] = 3$, $[-3{,}5] = -4$, $\left\{-\frac{47}{3}\right\} = \frac{1}{3}$. Непосредственно из определения следует, что на каждом полуинтервале вида $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, функция $f(x) = [x]$ постоянна (со значением n), а в целых точках функция имеет «скачок» на единицу. Кроме того, функция целой части неубывающая на всей числовой прямой. Функция $g(x) = \{x\}$ строго возрастает на каждом полуинтервале вида $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, а также в силу равенства $\{x+1\} = \{x\}$ является периодической с основным периодом 1.

При исследовании композиций, в которых входят функции $f(x) = [x]$ и $g(x) = \{x\}$, также бывает удобно переходить к кусочному заданию функции.

Задача 1.312. Построить графики функций: а) $f(x) = \left[\sqrt{x}\right]$; б) $g(x) = \left\{\sqrt{x}\right\}$.

Решение. Обе функции определены на луче $[0; +\infty)$. Из определения целой и дробной частей следует, что для каждого целого неотрицательного числа n на промежутке $n^2 \leqslant x < (n+1)^2$ верны равенства $f(x) = \left[\sqrt{x}\right] = n$ и $g(x) = \left\{\sqrt{x}\right\} = \sqrt{x} - n$, причём промежутки указанного вида в объединении дают весь луч $[0; +\infty)$. Таким образом, получили кусочное задание для каждой из функций.





Графики функций f и g приведены на рисунке. □

Полезно представить себе, как расположен график функции $r(x) = \sqrt{x}$ по отношению к двум графикам, изображённым в решении предыдущей задачи, и сформулировать в общем случае, какими геометрическими преобразованиями графика функции f получаются графики функций $g(x) = [f(x)]$ и $h(x) = \{f(x)\}$. Аналогичный вопрос в общем случае для графиков функций $\widetilde{g}(x) = f\big([x]\big)$ и $\widetilde{h}(x) = f\big(\{x\}\big)$ также оставляем читателю в качестве полезного упражнения.

§ 1.5. Обратные функции и их графики.