(a_n) и (b_n), для которых последовательность ... сверху последовательностей

3.87°. Привести пример двух ограниченных снизу последовательностей (a_n) и (b_n), для которых последовательность $(a_n b_n)$ неограничена снизу.

✓ **3.88.** Доказать, что последовательность (a_n), $a_n \neq 0$, ограничена тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ отделена от нуля (см. определение на с. 160).

3.89. Пусть последовательность (a_n) ограничена, а последовательность (b_n) отделена от нуля. Доказать, что последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ограничена.

3.90. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ указать какой-либо номер $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы из неравенства $n > N$ следовало неравенство $|a_n| < \varepsilon$, если:

✓ а) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; ◇ б) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; ◇ в) $a_n = \dfrac{1}{5^n}$;

г) $a_n = \dfrac{n}{n^2 - 6n + 13}$; д) $a_n = \dfrac{\cos n}{\lg(n+1)}$; е) $a_n = \dfrac{2\sqrt[3]{n}}{n - \sin n}$.

3.91. Для заданного числа $C > 0$ указать какой-либо номер $N \in \mathbb{N}$, чтобы из неравенства $n > N$ следовало неравенство $|a_n| > C$, если:

✓ а) $a_n = \lg^2 n$; ◇ б) $a_n = 3^n - 2^n$; в) $a_n = 2^{\sqrt[3]{n}}$;

г) $a_n = \sqrt{n^4 - 4n^2 + 5}$; д) $a_n = n \cos \dfrac{\pi n}{3}$; е) $a_n = \dfrac{n^2}{n + \sin n}$.

3.92. Для заданного $C > 1$ указать минимально возможный номер $N_{\min}$, для которого при всех $n > N_{\min}$ выполнено неравенство $|a_n| > C$, если:

◇ а) $a_n = n^k$, $k \in \mathbb{N}$; ✓ б) $a_n = \sqrt[k]{n}$; в) $a_n = q^n$, $|q| > 1$; г) $a_n = \log_a n$, $a > 1$.

3.93. Для заданного $\varepsilon \in (0;\,1)$ указать минимально возможный номер $N_{\min}$, для которого при всех $n > N_{\min}$ выполнено неравенство $|a_n| < \varepsilon$, если:

✓а) $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$; б) $a_n = q^n$, $0 < |q| < 1$; в) $a_n = q^{2^n}$, $0 < q < 1$.

3.94. Описать класс последовательностей (a_n), заданный свойством:

а) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

б) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$;

✓в) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

г) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$;

д) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

е) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$;

ж) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

✓з) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$.

✓**3.95°.** Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

✓**3.96.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a.$$

3.97. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$, $k \geqslant 2$.

✓**3.98.** Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geqslant 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \geqslant 2$.

Доказать равенства, пользуясь определением предела (3.99—3.104).

✓**3.99.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-a}{n+b} = 1$, $b > 0$. ◇**3.100.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3}{n^2-4n+5} = 1$.

3.101. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) = 0$. **3.102.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = 2$.

3.103. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{4^n - 2^n} = 1$. **3.104*.** $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = 1$.

3.105. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Доказать, что последовательность $(a_n + b_n)$ бесконечно большая.

3.106. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, а последовательность (b_n) ограничена. Доказать, что последовательность $(a_n + b_n)$ бесконечно большая.

3.107. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Доказать, что последовательность $(a_n b_n)$ бесконечно большая.

Вычислить предел последовательности (3.108—3.121).

◇**3.108.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n - a^n}{b^n + a^n}$, $0 < a < b$. **3.109.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$.

✓**3.110.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\right)^3$, $a, b > 0$. **3.111.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} - 2^{n+1}}}$.

3.112°. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+a)^2 - (n+b)^2}{n}$. ✓**3.113.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3 - n(n+5)^2}{n^2}$.

◇**3.114.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{n^k}$, $a_0 \neq 0$.

✓**3.115.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$. **3.116.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

3.117. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$. **3.118.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$, $m \in \mathbb{N}$.

3.119. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^m}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}k^m-\dfrac{n^{m+1}}{m+1}\Big)$, $m\in\mathbb{N}$.

3.120. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\dfrac{1^2}{n^2}-\dfrac{2^2}{n^2}+\ldots+(-1)^n\dfrac{(n-1)^2}{n^2}\Big|$.

3.121. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}-\dfrac{n}{4}\Big)$.

3.122. Пусть $C_n=\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^n$ (*числа Каталана*). Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}}{C_n}$.

3.123°. Пусть последовательность (a_n) сходится. Обязательно ли сходится последовательность $(a_{n+1}-a_n)$?

3.124. Пусть $a_n\geqslant 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q\in(0;1)$. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{r^n}=0$ при всех $r>q$.

✓**3.125.** Пусть $a_n\geqslant 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nq^n=0$ при всех $q>1$.

Доказать равенство (3.126—3.133):

✓**3.126.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a>0$. ◇**3.127.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3.128. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$, $k\in\mathbb{N}$. ✓**3.129.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

✓**3.130.** $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$, $|q|<1$. **3.131.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$, $a>0$.

✓**3.132.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$, $a>1$, $k\in\mathbb{N}$. ✓**3.133.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$, $0<a\neq 1$.

✓**3.134.** Пусть $a_n\geqslant 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

3.135. Пусть положительная последовательность (a_n) ограничена и отделена от нуля. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

Найти предел последовательности (3.136—3.141).

3.136°. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{100n^2+1}{3n^2-n}}$. **3.137.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+n^k}$, $a>0$, $k\in\mathbb{N}$.

✓**3.138.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a, b>0$. **3.139.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+n^k}$, $a>0$, $k\in\mathbb{N}$.

3.140. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{arctg}n+(-1)^n}$. **3.141.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-\log_2 n}$.

✓**3.142.** Пусть (F_n) — последовательность чисел Фибоначчи (см. задачу 3.21). Вычислить предел: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{F_n}$.

С помощью принципа двустороннего ограничения доказать, что последовательность (a_n) бесконечно малая (3.148—3.148).

✓**3.143°.** $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$. **3.144°.** $a_n=\dfrac{\sin^2\frac{\pi n}{6}}{\ln(n+1)}$. **3.145.** $a_n=\dfrac{n\operatorname{arctg}n}{\sqrt{n^3+1}}$.

3.146. $a_n=\dfrac{n\cos n!}{2^n+1}$. **3.147.** $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ln n$. **3.148.** $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

Доказать расходимость последовательности (a_n) (3.149—3.153).

◇**3.149.** $a_n=(-1)^n$. ✓**3.150.** $a_n=n^{(-1)^n}$. **3.151.** $a_n=(-1)^n n$.

3.152. $a_n=\sin\dfrac{\pi n}{6}$. ✓**3.153.** $a_n=\sin\pi\sqrt{n^2+n}$.

3.154*. Доказать, что последовательность (a_n): а) $a_n=\sin k^n$; б) $a_n=\sin n^k$ не является бесконечно малой для всякого $k\in\mathbb{N}$.

и согласно задаче 2.25 получаем *формулу суммы конечной геометрической прогрессии*

$$a_n = 1+q+\ldots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

При $q=-1$ имеем $a_{2k-1}=1$, $a_{2k}=0$, $k\in\mathbb{N}$, и предела у (a_n) нет. При $|q|>1$ согласно результату задачи 3.92 получаем $q^n\to\infty$, а значит, и $a_n\to\infty$, а при $|q|<1$ в силу задачи 3.93 имеем $q^n\to 0$, поэтому $a_n\to\dfrac{1}{1-q}$. □

Задача 3.178. Пусть $a>0$, $b>0$, $a_1=a+b$, $a_{n+1}=a+b-\dfrac{ab}{a_n}$ при $n\in\mathbb{N}$. Найти формулу общего члена последовательности (a_n) и вычислить её предел.

Решение. Пусть сначала $a=b$. В этом случае $a_1=2a$, $a_2=\frac{3}{2}a$, $a_3=\frac{4}{3}a$. Вид первых трёх членов последовательности позволяет предположить, что $a_n=\dfrac{n+1}{n}a$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Докажем это методом математической индукции. База индукции уже установлена. Для осуществления индуктивного шага заметим, что если при некотором $n\in\mathbb{N}$ верно равенство $a_n=\dfrac{n+1}{n}a$, то из определения последовательности (a_n) получаем

$$a_{n+1}=2a-\frac{a^2}{a_n}=2a-\frac{na}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a,$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

Теперь рассмотрим случай $a\neq b$. По условию $a_1=a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$. Предположим, что $a_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$a_{n+1}=a+b-\frac{ab}{a_n}=a+b-\frac{ab(a^n-b^n)}{a^{n+1}-b^{n+1}}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^{n+1}-b^{n+1})}{a^{n+1}-b^{n+1}}+\frac{ab^{n+1}-a^{n+1}b}{a^{n+1}-b^{n+1}}=\frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}.$$

Следовательно, по принципу математической индукции $a_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Если $a>b$, то $a_n=\dfrac{a-b(b/a)^n}{1-(b/a)^n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Аналогично $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$ при $a<b$. Окончательно получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\max\{a,b\}$. □

§ 3.3. Теорема Вейерштрасса

Определение. *Точной верхней (нижней) гранью* последовательности (a_n) называется точная верхняя (нижняя) грань множества её значений, она обозначается $\sup a_n$ $(\inf a_n)$.

Одним из основных инструментов доказательства сходимости монотонных последовательностей является следующее утверждение.

Теорема (Вейерштрасс). *Если последовательность (a_n) неубывающая и ограничена сверху, то она имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup a_n$. Если последовательность (a_n) невозрастающая и ограничена снизу, то она имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf a_n$.*

Из инвариантности сходимости последовательности относительно сдвигов получаем следующий вариант теоремы Вейерштрасса.

Теорема. *Любая ограниченная монотонная начиная с некоторого номера последовательность сходится.*

Нам потребуется также следующее утверждение о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема. *Если последовательность (a_n) сходится и при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leqslant a$ $(a_n \geqslant a)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant a$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant a)$.*

Если сходящаяся последовательность (a_n) задана рекуррентно, т. е. соотношением вида $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$, то в некоторых случаях значение $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ можно найти, переходя к пределу в этом равенстве. Например, если рекуррентное соотношение имеет вид $a_n = f(a_{n-1})$, то значение предела является корнем уравнения $x = f(x)$. Покажем на примерах, как применяется этот метод.

Задача 3.195. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, $|q| < 1$.

Решение. Пусть $0 < q < 1$. Последовательность (a_n), $a_n = nq^n$, может быть задана рекуррентно следующим образом: $a_1 = q$, $a_{n+1} = q\left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ при $n > \frac{q}{1-q}$, т. е. последовательность (a_n) убывающая начиная с некоторого номера. Кроме того, $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы Вейерштрасса последовательность сходится. Обозначим её предел через a. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении, получаем

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(q\left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n\right) = q \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = qa.$$

Решая уравнение $a = qa$, находим, что $a = 0$.

При $q = 0$ утверждение задачи верно, а случай $-1 < q < 0$ сводится к рассмотренному с помощью равенства $|nq^n| = n|q|^n$. □

Задача 3.198. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Решение. Последовательность $a_n = \sqrt[n]{a}$ возрастает при $a < 1$ и убывает при $a > 1$ (см. задачу 3.59а). В первом случае она ограничена сверху числом 1, во втором — ограничена снизу числом 1. Таким образом, по теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Переходя к пределу в равенстве $a_{2n}^2 = a_n$ (которое верно в силу соотношения $(\sqrt[2n]{a})^2 = \sqrt[n]{a}$), приходим к уравнению $l^2 = l$, которое имеет два корня: $l = 0$ и $l = 1$. При $a \geqslant 1$ имеем $a_n \geqslant 1$, а при $0 < a < 1$ имеем $a_n \geqslant a_1 > 0$, поэтому предел последовательности (a_n) отличен от нуля при любом a. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. □

Задача 3.205. Доказать сходимость и найти предел последовательности (a_n), если $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Формальный переход к пределу в уравнении $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ затруднён: внести предел под знак корня можно, но это требует дополнительного обоснования (см. задачу 3.98). Чтобы ограничиться применением теорем об арифметических свойствах предела последовательности, возведём рекуррентное соотношение в квадрат: $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Переходя к пределу, получим, что значение предела a удовлетворяет условию $a^2 = 2 + a$, откуда $a = 2$, так как $a_n > 0$ при всех n. Для установления законности этой операции покажем, что предел существует в силу того, что последовательность (a_n) удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса. Поскольку $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ и $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - 2 - a_{n-1} > 0$, если $a_n > a_{n-1}$, по индукции получаем, что последовательность (a_n) возрастает. Аналогично доказывается неравенство $a_n < 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$: $a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$, если $a_n < 2$. Таким образом, последовательность ограничена сверху числом 2. Значит, по теореме Вейерштрасса данная последовательность сходится и из проведённых в начале решения выкладок действительно следует, что её предел равен 2. □

Замечание. Для рассмотренной последовательности (a_n) можно найти формулу общего члена: $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (проверьте!), которая позволяет оценить скорость сходимости последовательности (a_n) к пределу:

$$0 < 2 - a_n = 4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}} < 4\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4^{n+1}}.$$

Внимание! Формальный переход в рекуррентном соотношении может привести к неверным результатам, если последовательность расходится! Расходящаяся последовательность (a_n), $a_n = (-1)^{n+1}$ из задачи 3.149 может быть задана рекуррентно следующим образом: $a_1 = 1$; $a_n = -a_{n-1}$, $n > 1$. Если в уравнении $a_n = -a_{n-1}$ формально перейти к пределу, то получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, хотя последовательность (a_n) предела не имеет.

Таким образом, возможность перехода к пределу в рекуррентном соотношении должна быть обоснована, т. е. доказательство существования предела является неотъемлемой частью решения. С другой стороны, формальный переход к пределу при поиске пути решения задачи позволяет выявить нижнюю или верхнюю оценку исследуемой последовательности для дальнейшего доказательства ограниченности, например, методом математической индукции.

Задача 3.208. Доказать сходимость и найти предел последовательности (a_n), если $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Докажем сначала ограниченность данной последовательности. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см. задачу 2.98) получаем, что при $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \geqslant \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a} > 0.$$

Используя это неравенство, для $n \geqslant 2$ получаем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n} - a_n\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{a}\right) = 0.$$

Итак, последовательность (a_n) невозрастающая (начиная с a_2) и ограничена снизу, следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Переходя в равенстве $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$, откуда с учётом условия $l \geqslant 0$ следует, что $l = \sqrt{a}$. □

Заметим, что в рассмотренной задаче последовательность (a_n) чрезвычайно быстро сходится к своему пределу, равному $\sqrt{a}$. Например, если $a=2$, то

$$0<a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n}+a_n-2\sqrt{2}\right)=\frac{\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2}{2a_n}\leqslant\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2 \quad \text{при всех } n\in\mathbb{N},$$

откуда следует оценка $0<a_n-\sqrt{2}\leqslant\left(a_2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-2}}<\frac{1}{10^{2^{n-2}}}$, так как $a_2-\sqrt{2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}<\frac{1}{10}$. Этот факт позволяет использовать данное рекуррентное соотношение, называемое *итерационной формулой Герона*, для приближённого вычисления квадратного корня с очень хорошей точностью, выбирая в качестве приближённого значения член последовательности a_n с достаточно небольшим номером n (так, в случае $a=2$ уже десятый член последовательности даёт более 250 верных знаков после запятой числа $\sqrt{2}$).

Задача 3.213. Доказать что последовательность (a_n) сходится, и найти её предел, если $a_1=0$ и $a_{n+1}=\frac{1}{4(1-a_n)}$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Покажем сначала методом математической индукции, что $a_n<\frac{1}{2}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. База индукции выполнена, так как по условию $a_1=0<\frac{1}{2}$. Если $a_n<\frac{1}{2}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$, то $1-a_n>\frac{1}{2}$, следовательно, $4(1-a_n)>2$ и $a_{n+1}<\frac{1}{2}$. Таким образом, шаг индукции обоснован.

Также по индукции докажем, что последовательность (a_n) возрастает. В самом деле, $a_2=\frac{1}{4}>a_1$. Предположив, что $a_n>a_{n-1}$ при некотором $n\geqslant 2$, получим:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4(1-a_n)}-\frac{1}{4(1-a_{n-1})}=\frac{a_n-a_{n-1}}{4(1-a_n)(1-a_{n-1})}>0.$$

Итак, последовательность (a_n) возрастает и ограничена сверху, и поэтому по теореме Вейерштрасса имеет предел a, который удовлетворяет уравнению $a=\frac{1}{4(1-a)}$. Следовательно, $a=\frac{1}{2}$. □

Задача 3.223. Пусть $a_1=9$, $a_2=6$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$ при $n\geqslant 2$. Доказать, что последовательность (a_n) сходится, и найти её предел.

Решение. Докажем по индукции, что последовательность (a_n) ограничена снизу числом 4. По условию $a_1>4$ и $a_2>4$, а если $a_n>4$ и $a_{n-1}>4$, то и $a_{n+1}>\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$. Следовательно, $a_n>4$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

Теперь докажем также по индукции, что последовательность (a_n) убывает. Имеем $a_2<a_1$ и $a_3=3+\sqrt{6}<6=a_2$. Предположим, что $a_n<a_{n-1}<a_{n-2}$ при некотором $n>2$. Тогда $a_{n+1}<a_n<a_{n-1}$, поскольку

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_{n-2}}=\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-2}}<0.$$

Таким образом, $a_{n+1}<a_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Итак, по теореме Вейерштрасса последовательность (a_n) сходится к некоторому числу a.

Дважды возводя в квадрат рекуррентное соотношение, получим

$$(a_{n+1}^2-a_n-a_{n-1})^2=4a_na_{n-1}.$$

Переходя к пределу имеем уравнение $(a^2-2a)^2=4a^2$, откуда находим $a=0$ или $a=4$. Поскольку $a_n>4$, заключаем, что $a=4$.

Отметим, что задача 3.98 позволяет перейти к пределу непосредственно в равенстве $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$ и получить уравнение $a=2\sqrt{a}$, решая которое и отбрасывая посторонний корень $a=0$, также получим $a=4$. □

Задача 3.235. Пусть $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) имеют общий предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$, причём $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ для всякого $n\in\mathbb{N}$ и $2<e<3$.

Решение. В задаче 3.58 было доказано, что последовательность (a_n) возрастает, а последовательность (b_n) убывает. Таким образом, для любого $n\in\mathbb{N}$ получаем цепочку неравенств

$$2=a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\ldots<b_2<b_1=4.$$

По теореме Вейерштрасса обе последовательности имеют предел, который является для них общим в силу равенства $b_n=a_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Величина этого предела называется числом e и играет фундаментальную роль в математике.

Из теоремы Вейерштрасса также следует, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant e\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, причём эти неравенства на самом деле строгие — иное противоречило бы строгой монотонности последовательностей a_n и b_n. Подставив в левое неравенство $n=1$, а в правое $n=5$, мы получим, что $e>2$ и $e<\dfrac{6^6}{5^6}=\dfrac{46656}{15625}<3$. Итак, $2<e<3$. □

На самом деле, число e равно $2{,}718281828459\ldots$, и для нахождения его приближённых значений существуют более удобные способы, чем непосредственное использование последовательностей a_n и b_n.

Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются $\ln x=\log_e x$.

§ 3.4. Теоремы Штольца и Тёплица