§ 3.2. Предел последовательности

3.2.1. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность (a_n) называется *бесконечно малой*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Формально данное определение можно записать следующим образом:

$$(a_n) \text{ бесконечно малая} \iff \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N \text{ имеем } |a_n| < \varepsilon.$$

В случае неотрицательной последовательности (a_n) модуль в последнем неравенстве можно опустить. Про бесконечно малую последовательность (a_n) также говорят, что она *стремится к нулю*, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \text{ или } a_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } a_n = o(1) \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 3.90. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ указать какой-либо номер $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы из неравенства $n > N$ следовало неравенство $|a_n| < \varepsilon$, если: б) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; в) $a_n = \dfrac{1}{5^n}$.

Решение. б) Домножая на сопряжённое выражение, получаем, что $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Таким образом, неравенство $a_n < \varepsilon$ выполняется, если $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, т. е. $n > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$. В качестве искомого номера N можно взять, например, $\max\left\{1, \left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]\right\}$.

в) Поскольку

$$a_n = \frac{1}{5^n} < \varepsilon \iff -n < \log_5 \varepsilon \iff n > \log_5 \frac{1}{\varepsilon},$$

искомый номер можно выбрать равным $N = \max\left\{1, \left[\log_5 \frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$. □

Поскольку функция логарифм будет строго введена только в гл. 4, приведём вариант решения, использующий неравенство Бернулли (см. задачу 2.91): $a_n = \dfrac{1}{(1+4)^n} < \dfrac{1}{1+4n} < \dfrac{1}{4n} < \varepsilon$ при $n > N = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$. Отметим, что при таком подходе выбирается существенно большее N, чем в решении, использующем логарифм, где выбор N был оптимальным.

Определение. Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой*, если для любого числа $C > 0$ можно указать такой номер $N = N(C) \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > C$.

Формальная запись:

$$(a_n) \text{ бесконечно большая} \iff \forall C > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N \text{ имеем } |a_n| > C.$$

Заменяя в этом определении неравенство $|a_n| > C$ на неравенство $a_n > C$ ($a_n < -C$), получаем определение положительной (отрицательной) бесконечно большой последовательности.

Символически утверждение о том, что последовательность является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой), записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

Задача 3.91. Для заданного числа $C>0$ указать какой-либо номер $N\in\mathbb{N}$, чтобы из неравенства $n>N$ следовало неравенство $|a_n|>C$, если $a_n=3^n-2^n$.

Решение. Поскольку $a_n = 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \geqslant 3^n\left(1-\frac{2}{3}\right) = 3^{n-1}$ при всех $n\in\mathbb{N}$, для удовлетворения неравенства $a_n > C$ достаточно выполнения условия $3^{n-1}>C$, или $n>1+\log_3 C$. Следовательно, в качестве N можно взять $\max\{0, [\log_3 C]\}+1$.

Приведём также решение без логарифмов. Поскольку

$$a_n \geqslant 3^{n-1} = (1+2)^{n-1} > 1+2(n-1) = 2n-1,$$

неравенство $a_n>C$ выполняется при $n>N=\left[\frac{1+C}{2}\right]+1$. □

Последовательность (a_n) называется *отделённой от нуля*, если существует такое число $\delta>0$, что $|a_n|>\delta$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Если существуют такой номер N и такое число $\delta>0$, что $|a_n|>\delta$ при всех $n\geqslant N$, то говорят, что последовательность (a_n) отделена от нуля начиная с некоторого номера. Например, последовательность (a_n), $a_n=\frac{1}{n}$, не отделена от нуля и не является отделённой от нуля начиная с некоторого номера.

Справедливы следующие утверждения о бесконечно малых и бесконечно больших последовательностях.

Теорема. а) *Последовательность (a_n) с отличными от нуля членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ является бесконечно большой.*

б) *Если последовательность (a_n) бесконечно малая, а последовательность (b_n) ограничена, то последовательность (a_nb_n) бесконечно малая.*

в) *Если последовательность (a_n) бесконечно большая, а последовательность (b_n) отделена от нуля начиная с некоторого номера, то последовательность (a_nb_n) бесконечно большая.*

Для доказательства того, что последовательность является бесконечно малой или бесконечно большой, достаточно предъявить какой-то номер, начиная с которого выполняется требуемое условие. Если найден какой-то подходящий номер N_1, то можно взять и любой другой номер $N>N_1$. Особый интерес представляет нахождение минимально возможного номера $N_{\min}(\varepsilon)$ ($N_{\min}(C)$), поскольку это позволяет оценить, насколько быстро последовательность стремится к нулю (к бесконечности).

Основные элементарные функции служат источником важных примеров бесконечно больших последовательностей. Так, для всех $k\in\mathbb{N}$ и $a>1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \log_a n = +\infty.$$

Поскольку последовательность, обратная к бесконечно большой последовательности, является бесконечно малой, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_a n} = 0$$

(при $n=1$ выражение $\frac{1}{\log_a n}$ не определено, но можно считать, что первый член этой последовательности равен чему угодно).

Доказательству этих соотношений посвящены задачи 3.92 и 3.93.

Задача 3.92. Для заданного $C > 1$ указать минимально возможный номер $N_{\min}$, для которого при всех $n > N_{\min}$ выполнено неравенство $|a_n| > C$, если $a_n = n^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Неравенство $n^k > C$ выполняется тогда и только тогда, когда $n > \sqrt[k]{C}$, откуда находим $N_{\min}(C) = [\sqrt[k]{C}]$. □

3.2.2. Предел последовательности и его свойства

Определение. Число a называется *пределом* последовательности (a_n) и обозначается $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (или $a_n \to a$ при $n \to \infty$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех последующих номеров n (т. е. $n > N$) выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Формальная запись: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N$ имеем $|a_n - a| < \varepsilon$.

Иными словами, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ означает, что последовательность $(a_n - a)$ является бесконечно малой. Любая бесконечно малая последовательность имеет своим пределом число 0.

Определение. Если последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся* (говорят также, что она *сходится к числу* a). Если последовательность не имеет предела, то она называется *расходящейся*.

Задача 3.100. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 3}{n^2 - 4n + 5} = 1$.

Решение. Зададим число $\varepsilon > 0$ и найдём такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{n^2 - 3}{n^2 - 4n + 5} - 1 \right| < \varepsilon.$$

При $n > 2$ получаем оценку

$$\left| \frac{n^2 - 3}{n^2 - 4n + 5} - 1 \right| = \frac{|4n - 8|}{(n-2)^2 + 1} < \frac{4(n-2)}{(n-2)^2} = \frac{4}{n-2}.$$

Поскольку $\dfrac{4}{n-2} < \varepsilon$ при $n > \dfrac{4}{\varepsilon} + 2$, можно положить $N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right] + 2$. Итак, по определению число 1 является пределом данной последовательности. □

Определение предела последовательности можно сформулировать в терминах окрестностей: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда в любой ε-окрестности точки a лежат все члены последовательности (a_n), начиная с некоторого.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства предела последовательности.

1. Если предел существует, то он единственный.

2. Изменение последовательности в конечном числе номеров не влияет на её сходимость и величину предела в случае сходимости.

3. Сдвинутая последовательность (a_{n+m}), $m \in \mathbb{Z}$, сходится или расходится одновременно с исходной последовательностью (a_n), причём в случае сходимости величина предела не меняется.

4. Если последовательность сходится, то она ограничена.

5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для любого числа $b \neq a$ найдутся такие $\delta > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \notin U_\delta(b)$ для всех $n > N$.

Теорема (арифметические свойства предела).

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*

а) *при всех* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ *последовательность* (c_n), $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$, *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lambda a + \mu b$;

б) *последовательность* (c_n), $c_n = a_n b_n$, *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = ab$;

в) *если* $b_n \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $b \neq 0$, *то последовательность* (c_n), $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{a}{b}$.

Задача 3.108. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n - a^n}{b^n + a^n}$, $0 < a < b$.

Решение. Согласно соотношениям на с. 160 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$, $q = \dfrac{b}{a} > 1$. Пользуясь арифметическими свойствами предела, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n - a^n}{b^n + a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (a/b)^n}{1 + (a/b)^n} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} (a/b)^n}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} (a/b)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1. \qquad \square$$

Записывая эту цепочку равенств, мы всюду подразумеваем, что из существования предела (или пределов) справа от знака равенства следует существование предела (пределов) слева от знака равенства (это вытекает из приведённых выше арифметических свойств предела). Таким образом, получив в конце числовой ответ, мы можем быть уверены, что исходный предел существует и имеет найденное значение. Такая же логика будет применяться в дальнейшем и при применении более сложных свойств предела.

Задача 3.114. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{n^k}$, $a_0 \neq 0$.

Решение. В силу соотношений на с. 160 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_j}{n^j} = 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$. С помощью утверждения о пределе суммы находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{n^k} = a_0 + \sum_{j=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{a_j}{n^j} = a_0. \qquad \square$$

Определение. Последовательности (a_n) и (b_n), $b_n \neq 0$, называются *эквивалентными* ($a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Из арифметических свойств предела последовательности сразу следует выполнение аксиом эквивалентности (см. § 2.5), т. е. такое название оправдано.

Из результата задачи 3.114 следует, что многочлен ненулевой степени эквивалентен своему старшему члену: $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k \sim a_0 n^k$ при $n \to \infty$, если $a_0 \neq 0$.

Теорема (принцип двустороннего ограничения). *Если при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, *то последовательность* (c_n) *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Задача 3.127. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$.

Решение. Используем утверждение задачи 2.87 (см. с. 111): для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство $1\leqslant \sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)=1$. Таким образом, в силу принципа двустороннего ограничения $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. □

Записывая отрицание существования предела последовательности (a_n), получаем формальное определение её расходимости:

$$(a_n)\ \text{расходится} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N\colon |a_n-a|\geqslant\varepsilon.$$

Из свойств предела вытекает также, что всякая неограниченная последовательность расходится.

Задача 3.149. Доказать расходимость последовательности (a_n), если $a_n=(-1)^n$.

Решение. Для любого числа $a\in\mathbb{R}$ последовательность (b_n), $b_n=|a_n-a|$, принимает два значения: $b_{2n}=|a-1|$, $b_{2n-1}=|a+1|$. При $a\neq\pm1$ для всех n имеем $b_n\geqslant\min\{|a+1|,|a-1|\}=\varepsilon$; если же $a=\pm1$, то для $\varepsilon=1$ и любого числа $N\in\mathbb{N}$ можно найти такой номер $n>N$ (чётный для $a=-1$ и нечётный для $a=1$), что $b_n=2>1=\varepsilon$. Таким образом, последовательность (a_n) не имеет предела. □

Задача 3.155. Доказать, что последовательность (a_n), $a_n=\sin n$, не имеет предела.

Решение. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$, то, переходя к пределу в равенстве

$$\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1,$$

получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=a\dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}=a\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 n+\cos^2 n=1$ следует, что $a^2+a^2\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{2}=1$, т. е. $|a|=\cos\dfrac{1}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=\sin\dfrac{1}{2}$ или $-\sin\dfrac{1}{2}$. С другой стороны, переход к пределу в равенстве $\sin 2n=2\sin n\cos n$ влечёт соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=\dfrac{1}{2}$. Полученное противоречие означает, что последовательность (a_n) расходится. □

До сих пор изложение теории предела последовательности иллюстрировалось примерами явно заданных последовательностей ($a_n=f(n)$), поскольку такой способ задания наиболее распространён и позволяет использовать свойства функции f. Иногда рекуррентно заданную последовательность можно представить в явном виде, и это облегчает поиск её предела или доказательство его отсутствия.

Задача 3.177. Пусть $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+q^n$ при $n\in\mathbb{N}$. Найти формулу общего члена последовательности (a_n) и вычислить её предел.

Решение. При $q=1$ получим $a_n=n$ и последовательность (a_n) предела не имеет. При $q\neq1$ имеем

$$a_n=q^{n-1}+a_{n-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+a_{n-2}=\ldots=q^{n-1}+\ldots+q+1$$

и согласно задаче 2.25 получаем *формулу суммы конечной геометрической прогрессии*

$$a_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

При $q=-1$ имеем $a_{2k-1}=1$, $a_{2k}=0$, $k \in \mathbb{N}$, и предела у (a_n) нет. При $|q|>1$ согласно результату задачи 3.92 получаем $q^n \to \infty$, а значит, и $a_n \to \infty$, а при $|q|<1$ в силу задачи 3.93 имеем $q^n \to 0$, поэтому $a_n \to \dfrac{1}{1-q}$. □

Задача 3.178. Пусть $a>0$, $b>0$, $a_1 = a+b$, $a_{n+1} = a+b-\dfrac{ab}{a_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Найти формулу общего члена последовательности (a_n) и вычислить её предел.

Решение. Пусть сначала $a=b$. В этом случае $a_1 = 2a$, $a_2 = \frac{3}{2}a$, $a_3 = \frac{4}{3}a$. Вид первых трёх членов последовательности позволяет предположить, что $a_n = \dfrac{n+1}{n}a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем это методом математической индукции. База индукции уже установлена. Для осуществления индуктивного шага заметим, что если при некотором $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $a_n = \dfrac{n+1}{n}a$, то из определения последовательности (a_n) получаем

$$a_{n+1} = 2a - \frac{a^2}{a_n} = 2a - \frac{na}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a,$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теперь рассмотрим случай $a \neq b$. По условию $a_1 = a+b = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$. Предположим, что $a_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a_{n+1} = a+b-\frac{ab}{a_n} = a+b-\frac{ab(a^n-b^n)}{a^{n+1}-b^{n+1}} =$$

$$= \frac{(a+b)(a^{n+1}-b^{n+1})}{a^{n+1}-b^{n+1}} + \frac{ab^{n+1}-a^{n+1}b}{a^{n+1}-b^{n+1}} = \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}.$$

Следовательно, по принципу математической индукции $a_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $a>b$, то $a_n = \dfrac{a-b(b/a)^n}{1-(b/a)^n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Аналогично $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ при $a<b$. Окончательно получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \max\{a,\, b\}$. □

§ 3.3. Теорема Вейерштрасса

Определение. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью* последовательности (a_n) называется точная верхняя (нижняя) грань множества её значений, она обозначается $\sup a_n$ ($\inf a_n$).

Одним из основных инструментов доказательства сходимости монотонных последовательностей является следующее утверждение.

Теорема (Вейерштрасс). *Если последовательность (a_n) неубывающая и ограничена сверху, то она имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$. Если последовательность (a_n) невозрастающая и ограничена снизу, то она имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.*

2.23. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

✓ **2.24°** $a_1+a_2+\ldots+a_n=na+\dfrac{n(n-1)}{2}d$, где $a_n=a+(n-1)d$, $n\in\mathbb{N}$ (арифметическая прогрессия).

✓ **2.25°** $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $q\neq 1$.

2.26. $q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n=\dfrac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2}$, $q\neq 1$.

◇ **2.27.** $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.28. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2.29. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

2.30. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

2.31. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$.

2.32. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

✓**2.33.** $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

✓**2.34.** $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

2.35. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2.36. $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\ldots+\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$.

✓**2.37.** $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$. **2.38.** $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{2}\right]=\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$.

2.39. $\cos x\cos 2x\cos 4x\ldots\cos 2^{n-1}x=\dfrac{\sin(2^n x)}{2^n\sin x}$, $x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

✓**2.40.** $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

2.41. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

$(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x$

◊**2.91.** Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$. Доказать, что $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ (*неравенство Бернулли*), причём при $n>1$ и $x \neq 0$ неравенство строгое.

2.92. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и $x > -1$. Доказать, что $\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{n}$, причём при $x \neq 0$ неравенство строгое.

Доказать неравенство при $n \in \mathbb{N}$ (2.93—2.97).

2.93. $\dfrac{n^{p+1}}{p+1} < 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p < \dfrac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$, если $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}$.

2.94. $(x+y)^n < 2^{n-1}(x^n + y^n)$, если $x+y>0$, $x \neq y$, $n \geqslant 2$.

2.95. $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \dfrac{1}{x^{n-4}} + \dfrac{1}{x^{n-2}} + \dfrac{1}{x^n} \geqslant n+1$, если $x>0$.

2.96. $\left|\sin \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$, если $0 \leqslant x_k \leqslant \pi$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

√**2.97.** $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, если $x_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

◊**2.98.** *Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.* Пусть $n>1$ и $x_k \geqslant 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Доказать, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

причём равенство имеет место только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

√**2.99.** *Неравенство ...*

ство, неравенство и т. п.) верно при каждом значении $n \in \mathbb{N}$, рассматривается набор утверждений, получаемых из данного при $n = 1, 2, 3$ и т. д., а к такому набору можно применить принцип математической индукции.

Задача 2.27. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение. *База.* Проверим, что равенство верно при $n = 1$. Действительно, в этом случае и левая, и правая часть принимает значение 1.

Шаг. Зафиксируем произвольное натуральное число n. Предполагая справедливость данного равенства для n, получим, что при замене n на $n+1$ его левая часть равна $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, т. е. правой части доказываемого равенства при замене n на $n+1$. Следовательно, в силу принципа математической индукции рассматриваемое равенство справедливо для всех натуральных n. □

Задача 2.46. Докажем, что при $n \geqslant 5$ справедливо неравенство $n^2 < 2^n$.

Решение. *База.* Утверждение верно для $n = 5$, так как $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

Шаг. Зафиксируем произвольное натуральное число $n \geqslant 5$. Используя

3.93. Для заданного $\varepsilon \in (0;\,1)$ указать минимально возможный номер $N_{\min}$, для которого при всех $n > N_{\min}$ выполнено неравенство $|a_n| < \varepsilon$, если:

✓а) $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$; б) $a_n = q^n$, $0 < |q| < 1$; в) $a_n = q^{2^n}$, $0 < q < 1$.

3.94. Описать класс последовательностей (a_n), заданный свойством:

а) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

б) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$;

✓в) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

г) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$;

д) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

е) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$;

ж) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\colon |a_n| < \varepsilon$;

✓з) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$.

✓**3.95°.** Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

✓**3.96.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a.$$

3.97. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$, $k \geqslant 2$.

✓**3.98.** Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geqslant 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \geqslant 2$.

Доказать равенства, пользуясь определением предела (3.99—3.104).

✓**3.99.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-a}{n+b} = 1$, $b > 0$.

◇**3.100.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3}{n^2-4n+5} = 1$.

3.101. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) = 0$.

3.102. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = 2$.

3.103. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{4^n - 2^n} = 1$.

3.104*. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = 1$.

3.105. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Доказать, что последовательность $(a_n + b_n)$ бесконечно большая.

3.106. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, а последовательность (b_n) ограничена. Доказать, что последовательность $(a_n + b_n)$ бесконечно большая.

3.107. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Доказать, что последовательность $(a_n b_n)$ бесконечно большая.

Вычислить предел последовательности (3.108—3.121).

◇**3.108.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n - a^n}{b^n + a^n}$, $0 < a < b$.

3.109. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$.

✓**3.110.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\right)^3$, $a, b > 0$.

3.111. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} - 2^{n+1}}}$.

3.112°. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+a)^2 - (n+b)^2}{n}$.

✓**3.113.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3 - n(n+5)^2}{n^2}$.

◇**3.114.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{n^k}$, $a_0 \neq 0$.

✓**3.115.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

3.116. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

3.117. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

3.118. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$, $m \in \mathbb{N}$.

2.90. *Указание.* Для доказательства левого неравенства воспользоваться равенством из задачи 2.59, а для правого — оценкой $C_n^k \leqslant \dfrac{n^k}{k!}$ и задачей 2.88.

2.93. *Указание.* Пользуясь неравенством Бернулли, показать, что

$$\frac{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}{p+1} < n^p < \frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}.$$

2.99. *Указание.* Применить неравенство $G_n \leqslant A_n$ к числам $\dfrac{1}{x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

2.100. *Указание.* Положить в неравенстве Коши — Буняковского $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$.

2.101. *Указание.* Применить