✓**1.598.** $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{x^4 - 9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

1.599. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{|x|(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-3)}$.

1.600. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^3 - x}{(x+2)^2(x-10)}$.

1.601. $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)^2(x^2+1)}$.

1.602. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{|1-x|}{\sqrt{3}x+2}$.

1.603. $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{x+1}{|x|-2}$.

✓**1.604.** $f(x) = \operatorname{arctg}(\lg x)$.

1.605. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{\lg x}$.

1.606. $f(x) = \operatorname{arcctg}\left(\lg \dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

✓**1.607.** $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\cos x}$.

1.608*. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$.

1.609. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2^x+1}{2^x-1}$.

1.610*. $f(x) = \arcsin\left(x - \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}\right)$.

1.611. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 1}$.

Построить эскиз графика функции (1.612—1.632).

1.612. $f(x) = x \cos \dfrac{\pi}{x}$.

1.613. $f(x) = x^2 \cos \dfrac{2\pi}{x}$.

✓**1.614.** $f(x) = (x^2-1) \cos \dfrac{\pi}{x}$.

1.615. $f(x) = (x^2-1) \sin \dfrac{\pi}{x}$.

✓**1.616.** $f(x) = x\left(2 - \sin \dfrac{1}{x}\right)$.

1.617. $f(x) = x^2\left(2 + \sin^2 \dfrac{1}{x}\right)$.

1.618. $f(x) = x \arcsin \dfrac{1}{x}$.

✓**1.619.** $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cos \dfrac{\pi}{x}$.

1.620. $f(x) = 3^{-x^2} \sin 2\pi x$.

1.621*. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x|\sin x|}$.

1.622*. $f(x) = \dfrac{x}{2^{\frac{x}{1-x}} - 1}$.

1.623*. $f(x) = \dfrac{x+2}{2^{\frac{x-1}{x+1}} - 1}$.

✓**1.624*.** $f(x) = \dfrac{x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}$.

1.625*. $f(x) = \dfrac{3^x(x^2-4x+3)}{x-5}$.

1.626*. $f(x) = \dfrac{x^2 2^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-5x-4}$.

✓**1.627*.** $f(x) = 2^{-100(1-x)^2} + 2^{-100(1+x)^2}$.

1.628*. $f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}(\operatorname{sgn}(4-x^2)+1)$.

1.629*. $f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}(|x| - 2 - ||x|-2|)$.

1.630*. $f(x) = (\sqrt{9-x^2} - x - 3)3^x \cdot x(x-1)$.

1.631*. $f(x) = \arcsin\left(x\sqrt{x^2-1} - \sqrt{|x^4-2|}\right)$.

✓**1.632*.** $f(x) = \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+1} + x}{2x-1}$.

Построить эскиз кривой, заданной параметрически, $a > 0$, $b > 0$ (1.633–1.651).

◇**1.633.** $x = t^2 + t$, $y = \dfrac{t+1}{t-1}$.

✓**1.634.** $x = t - \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t}$.

1.635. $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$.

1.636. $x = \dfrac{t^2+1}{4(t-1)}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$.

1.637. $x = \dfrac{t^2}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2+1}{t+2}$.

1.638*. $x = \dfrac{t^2-1}{t(t+2)}$, $y = \dfrac{t^2}{(t+2)(t+1)}$.

◇**1.639*.** $x = \dfrac{t^3+1}{t^2}$, $y = \dfrac{t^2+t+2}{t^2(t+2)}$.

◇**1.640.** $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (*эллипс*).

✓**1.641.** $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ (*гипербола*).

✓**1.642.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (*циклоида*).

1.643. $x=\sin t$, $y=\sin 2t$.

◇**1.644.** $x=a\cos 2t$, $y=a\sin 3t$.

1.645. $x=\sin 3t$, $y=\cos t$.

1.646. $x=a\cos 4t$, $y=a\cos 3t$.

◇**1.647.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

✓**1.648.** $x=2^t\sin t$, $y=2^t\cos t$.

✓**1.649.** $x=(\log_2 t)\sin t$, $y=\cos t$.

1.650. $x=\operatorname{arctg} t$, $y=t^3-t$.

1.651. $x=\arcsin(\sin t)$, $y=\arccos(\cos t)$.

Преобразовать к полярным координатам уравнение кривой (1.652—1.659).

1.652°. $x=3$. **1.653°.** $y=5$. ✓**1.654.** $y=2x$.

◇**1.655°.** $x^2+y^2=4$. ✓**1.656.** $x^2+y^2=x$. **1.657.** $x^2+y^2=4y$.

1.658. $x^2+y^2=(x^2-y^2)^2$. **1.659.** $(x^2+y^2)^2=xy^2+yx^2$.

1.660. Преобразовать к полярным координатам уравнение прямой $ax+by=c$, где $a\neq 0$ или $b\neq 0$.

Преобразовать к декартовым координатам уравнение кривой (1.661—1.668).

1.661°. $r\cos\varphi=3$. **1.662°.** $r\sin\varphi=2$. **1.663°.** $r=\sqrt{2}$.

◇**1.664.** $r=2\sin\varphi$. **1.665.** $r=2\cos\varphi$. ✓**1.666.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

✓**1.667.** $r^2\sin 2\varphi=2$. **1.668.** $r=\cos^2\varphi$. ✓**1.669.** $r=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$.

Построить эскиз графика функции r, заданной в полярной системе координат, $a>0$ (1.670—1.683).

1.670°. $r(\varphi)=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. **1.671°.** $r(\varphi)=\dfrac{2}{\sin\varphi}$.

✓**1.672.** $r(\varphi)=a\varphi$ (*спираль Архимеда*).

✓**1.673*.** $r(\varphi)=\dfrac{a}{\varphi}$ (*гиперболическая спираль*).

✓**1.674.** $r=a3^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*).

1.675. $r(\varphi)=\sin\varphi$. **1.676.** $r(\varphi)=\cos\varphi$. **1.677.** $r(\varphi)=\cos 2\varphi$.

◇**1.678.** $r(\varphi)=\cos 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*).

1.679. $r(\varphi)=\cos 5\varphi$. **1.680.** $r(\varphi)=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

◇**1.681.** $r(\varphi)=1-\cos\varphi$ (*кардиоида*).

✓**1.682.** $r(\varphi)=1+2\cos\varphi$. (*улитка Паскаля*).

1.683*. $r(\varphi)=\dfrac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

Построить эскиз графика функции φ, заданной в полярной системе координат, $a>0$ (1.684—1.687).

1.684. $\varphi(r)=\dfrac{\pi}{3}$. **1.685.** $\varphi(r)=4r-r^2$.

1.686. $\varphi(r)=\dfrac{12r}{1+r^2}$. **1.687.** $\varphi(r)=2\pi\sin r$.

1.688. Построить эскиз кривой $r^2+\varphi^2=a^2$, заданной уравнением в полярной системе координат, $a>0$.

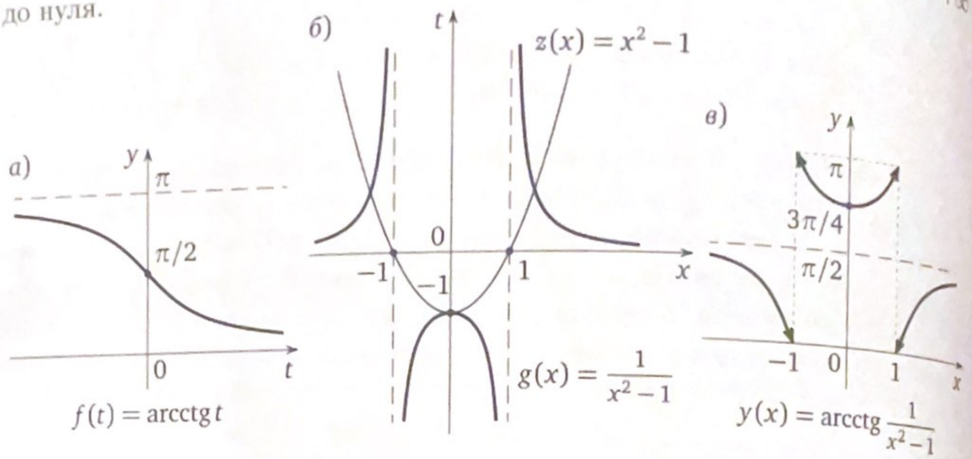
Построить эскиз кривой, заданной уравнением (1.689—1.691).

1.689. $x^2+y^2=x+2$. ✓**1.690.** $x^2+y^2=x+y$. **1.691.** $[x]+[y]=1$.

бесконечности до 1. При x, пробегающих луч $(-\infty; 0)$, переменная t отрицательна и убывает от нуля до минус бесконечности, следовательно, функция $f(x) = g(h(x))$ убывает от 1 до нуля.

Задача 1.590. Построить эскиз графика функции $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x^2-1}$.

Решение. Построим график функции $g(t) = \operatorname{arcctg} t$. Для построения эскиза графика функции $t = h(x)$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, построим сначала график знаменателя $z(x) = x^2 - 1$. В силу чётности функции $h(x)$ строим эскиз на луче $[0; +\infty)$, а затем продолжаем его налево симметрично относительно оси Oy. На полуинтервале $[0; 1)$ функция $z(x)$ отрицательна и возрастает от -1 до нуля, следовательно, функция $h(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ отрицательна и убывает от -1 до $-\infty$. На луче $(1; +\infty)$ функция $z(x)$ положительна и возрастает от нуля до $+\infty$, следовательно, функция $h(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ положительна и убывает от $+\infty$ до нуля.



В силу чётности функции $f(x)$ опять рассматриваем эскиз её графика только на луче $[0; +\infty)$. На полуинтервале $[0; 1)$ переменная $t = h(x)$ отрицательна и убывает от -1 до минус бесконечности, следовательно, функция g возрастает от $\dfrac{3\pi}{4}$ до π. На луче $(1; +\infty)$ переменная t положительна и убывает от плюс бесконечности до нуля, следовательно, функция возрастает от нуля до $\dfrac{\pi}{2}$. □

§ 1.10. Кривые, заданные параметрически

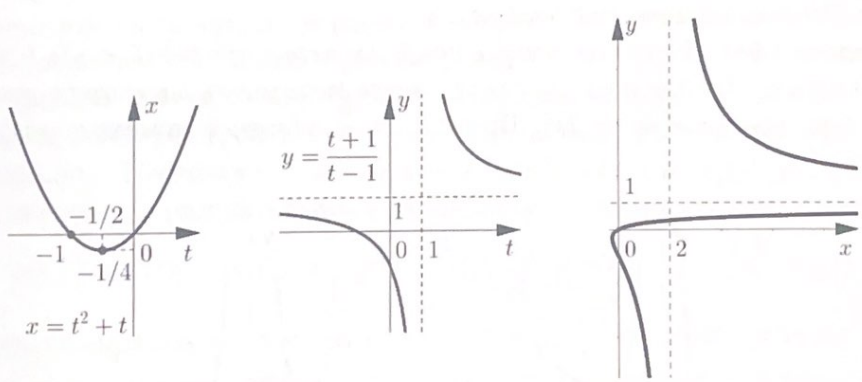
Кривой, заданной параметрически, называется множество точек плоскости xOy, координаты которых определяются из соотношений $x = x(t)$, $y = y(t)$ при каждом фиксированном t из некоторого множества T. Обычно в качестве множества T берётся некоторый промежуток. Если от функций $x(t)$ и $y(t)$ потребовать только непрерывность на промежутке T, то образом этого промежутка при отображении $x = x(t)$, $y = y(t)$ может быть множество в плоскости xOy, совсем не похожее на интуитивное представление о кривой. Например, можно задать такое отображение, что образом будет внутренность квадрата. Не углубляясь в теорию кривых, предполагаем, что рассматриваемый промежуток T изменения параметра t разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых функция $x(t)$ монотонна (т. е. возрастает или убывает). На таком промежутке определена обратная функция $t(x)$, и $y = y(t(x))$. Итак, каждому промежутку монотонности $x(t)$ соответствует функция $y(t(x))$, график которой называется *ветвью* данной кривой. Количество ветвей определяется количеством участков монотонности $x(t)$. Если точка $(x(t_0), y(t_0))$ не является общей для нескольких ветвей данной кривой, то в окрестности этой точки можно определить ту ветвь, которая проходит через эту точку.

Для построения эскиза кривой, заданной параметрически, на плоскости xOy необходимо отдельно рассматривать участки монотонности $x(t)$, а затем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые проводятся при рассмотрении сложной функции. Пусть t возрастает. Тогда если $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, то движение по кривой происходит направо вверх; если $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает, то движение по кривой происходит влево вверх и т. д.

Если при t, стремящемся к t_0 имеем x стремится к некоторому числу a, а $y(t)$ стремится к бесконечности, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$. Если же при $t \to t_0$ функция $x(t)$ стремится к бесконечности, а $y(t)$ стремится к b, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$.

Задача 1.633. Построить эскиз кривой $x = t^2 + t$, $y = \dfrac{t+1}{t-1}$.

Решение. Вначале построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$. При t, стремящемся к $-\infty$, x неограниченно растет, а y стремится снизу к единице. При возрастании t от $-\infty$ до $-\dfrac{1}{2}$ x убывает до $-\dfrac{1}{4}$, а y убывает до $-\dfrac{1}{3}$. Отметим, что при этом получается точка искомой кривой с наименьшей абсциссой. Далее, при стремлении t к 1 слева, x стремится к 2, а y неограниченно убывает — получаем вертикальную асимптоту $x = 2$. При стремлении t к 1 справа y неограниченно растёт, а x по-прежнему стремится к 2. Далее, y с ростом t



стремится к единице сверху, а x неограниченно растёт. Таким образом, $y = 1$ — горизонтальная асимптота искомой кривой. Отметим также, что при $t = -1$ кривая проходит через начало координат. □

Задача 1.639. Построить эскиз кривой $x = \dfrac{t^3+1}{t^2}$, $y = \dfrac{t^2+t+2}{t^2(t+2)}$.

Решение. Начнём с построения эскизов графиков функций $x(t)$ и $y(t)$.

Функция $x(t)$ рациональная, обращается в нуль при $t = -1$, положительна при $t \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, отрицательна при $t \in (-\infty; -1)$, уходит в $+\infty$

при $t \to 0$ и $t \to +\infty$ и в $-\infty$ при $t \to -\infty$, ось Ox является вертикальной асимптотой её графика; эти характеристики показывают, что на луче $(0; +\infty)$ функция $x(t)$ имеет минимум $x_0 = x(t_1)$.

Функция $y(t)$ рациональная, нулей не имеет, положительна при $t \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$, отрицательна при $t \in (-\infty; -2)$, уходит в $+\infty$ при $t \to -2+$ и $t \to 0$, уходит в $-\infty$ при $t \to -2-$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. ось Ot является горизонтальной асимптотой её графика, прямая $t = -2$ и ось Oy являются вертикальными асимптотами; эти характеристики показывают, что на интервале $(-2; 0)$ функция $y(t)$ имеет минимум $y_0 = y(t_2)$.

Переходим к построению эскиза заданной кривой на плоскости xOy. Рассмотрим те интервалы значений t, на которых определены обе функции $x(t)$ и $y(t)$. При изменении t от $-\infty$ до -2 функция $x(t)$ возрастает от $-\infty$ до $-\frac{7}{4}$, а функция $y(t)$ убывает от нуля до $-\infty$, следовательно, эта ветвь кривой расположена слева от прямой $x = -\frac{7}{4}$, идёт вправо вниз, ось Ox является её горизонтальной асимптотой, прямая $x = -\frac{7}{4}$ — вертикальной.

При изменении t от -2 до нуля функция $x(t)$ возрастает от $-\frac{7}{4}$ до $+\infty$, а функция $y(t)$ сначала убывает от $+\infty$ до y_0, затем возрастает до $+\infty$; следовательно, прямая $x = -\frac{7}{4}$ является вертикальной асимптотой этой ветви кривой, кривая идёт сначала вправо вниз, затем вправо вверх. При $t \to 0-$ обе функции $x(t)$ и $y(t)$ уходят в бесконечность.

При изменении t от нуля до $+\infty$ функция $y(t)$ убывает от $+\infty$ до нуля, а функция $x(t)$ сначала убывает от $+\infty$ до x_0, затем возрастает до $+\infty$; следовательно, эта ветвь кривой сначала идёт вниз и влево, затем вниз и вправо. Поведение кривой при $t \to 0+$ такое же, как и при $t \to 0-$. Поскольку $x(t)$ стремится к $+\infty$ и $y(t)$ стремится к 0 при $t \to +\infty$, ось Ox является горизонтальной асимптотой этой ветви. □

Задача 1.640. Построить эскиз кривой $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > 0$, $b > 0$.

Решение. В силу периодичности синуса и косинуса достаточно рассмотреть t из промежутка $[0; 2\pi]$. При $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ можно с помощью основного

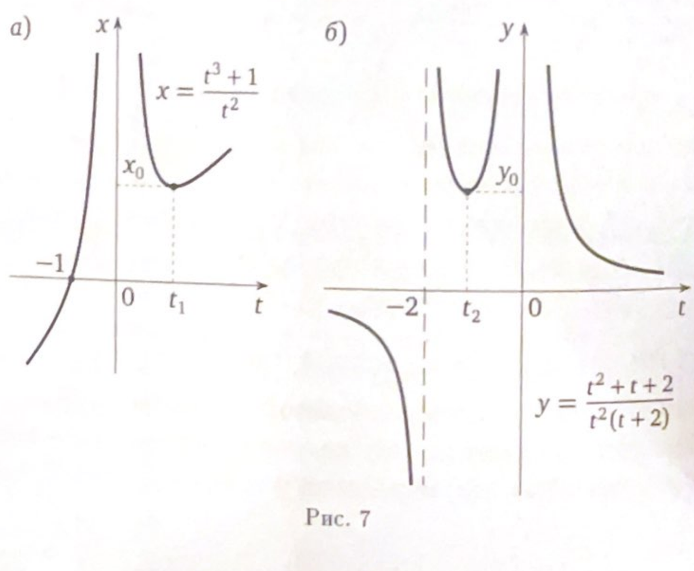
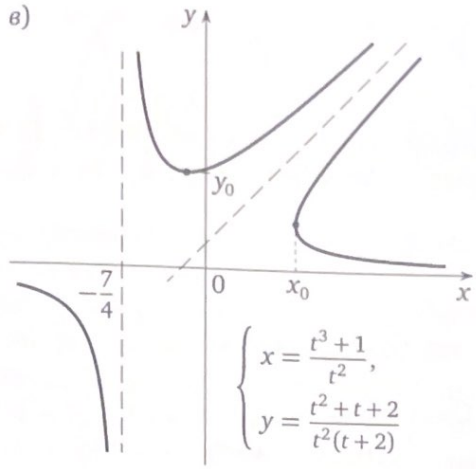


Рис. 7

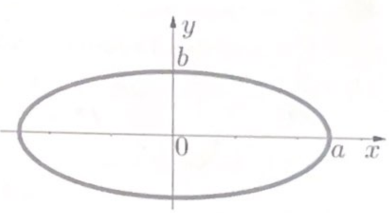


тригонометрического тождества выразить y через x:

$$y = b\sqrt{1-\cos^2 t} = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

При этом x убывает от a до 0, а y, соответственно, возрастает от 0 до b, вследствие чего получаем участок кривой, находящийся в первой четверти.

Далее воспользуемся симметрией: в силу равенств $x = -a\cos(\pi - t)$ и $y = b\sin(\pi - t)$ получаем, что при $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$ величина $(\pi - t)$ находится в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а значит искомый участок кривой располагается во второй четверти симметрично первому участку относительно оси Oy. Аналогично достраиваем оставшиеся участки кривой и получаем эллипс с полуосями a и b. □



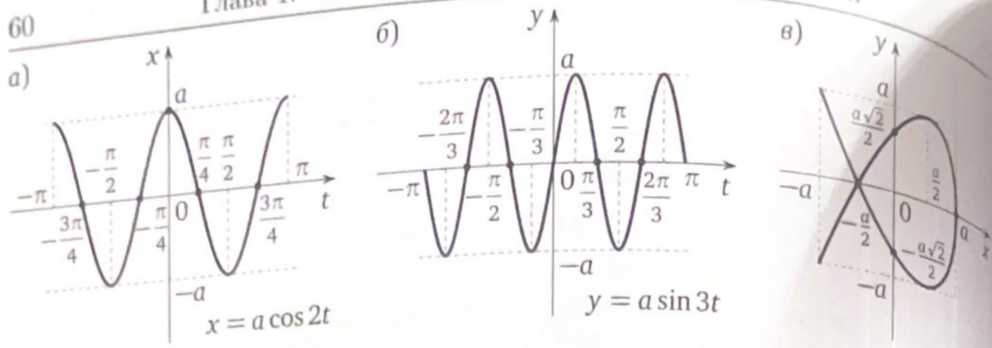
Задача 1.644. Построить эскиз кривой $x = a\cos 2t$, $y = a\sin 3t$, $a > 0$.

Решение. Поскольку точки $(x(t_0+2\pi), y(t_0+2\pi))$ и $(x(t_0), y(t_0))$ совпадают, достаточно рассматривать t на промежутке длины 2π. Из соотношений

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t), \quad x(\pi - t) = x(t), \quad y(\pi - t) = y(t)$$

следует, что при изменении t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаются те же точки кривой, что и при изменении t на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, а при изменении t на промежутке $[-\pi; 0]$ получаются точки кривой, симметричные относительно оси Ox точкам, полученным при изменении t на $[0; \pi]$. Таким образом, достаточно рассматривать t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$.

На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x(t)$ убывает, следовательно, этому промежутку соответствует одна ветвь кривой. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{6}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right), y\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{a}{2}, a\right)$. Когда t растёт от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой



происходит влево вниз до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-a, -a)$, при этом кривая пересекает ось Oy в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ и ось Ox в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$. При дальнейшем росте t от $\frac{\pi}{2}$ до π, как было отмечено выше, точки $(x(t), y(t))$ лежат на той же самой кривой. При изменении t от $-\pi$ до 0 получаем вторую ветвь кривой, симметричную первой относительно оси Ox. □

Задача 1.647. Построить эскиз кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Решение. Поскольку точки $(x(t_0 + 2\pi), y(t_0 + 2\pi))$ и $(x(t_0), y(t_0))$ совпадают, достаточно рассматривать t на промежутке $[0; 2\pi]$. Построим эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 8 *а*, *б*).

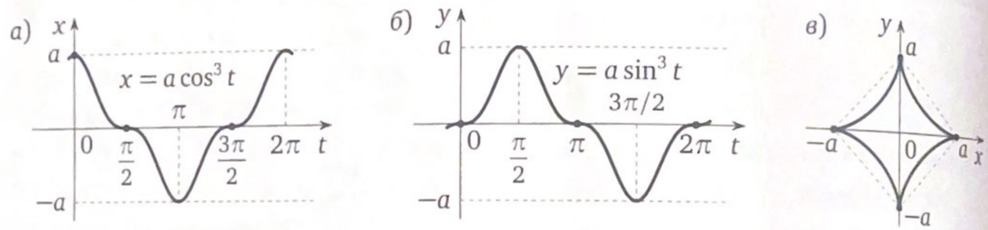


Рис. 8

Промежутками монотонности $x(t)$ являются $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, a)$; когда t растёт от $\frac{\pi}{2}$ до π, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi), y(\pi)) = (-a, 0)$. В этой точке начинается вторая ветвь кривой. Когда t растёт от π до $\frac{3\pi}{2}$, движение по кривой происходит вправо вниз до точки $\left(x\left(\frac{3\pi}{2}\right), y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0, -a)$. Когда t растёт от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, движение по кривой происходит вправо вверх до точки $(x(2\pi), y(2\pi)) = (a, 0)$. Имеем $x(2\pi - t_0) = x(t_0)$, $y(2\pi - t_0) = -y(t_0)$, $x(\pi - t_0) = -x(t_0)$, $y(\pi - t_0) = y(t_0)$, поэтому вместе с точкой (x_0, y_0) на кривой лежат точки $(-x_0, y_0)$ и $(x_0, -y_0)$, т. е. она симметрична относительно обеих координатных осей. Пусть t меняется на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Соответствующие точки кривой лежат в первой четверти. Рассмотрим множество точек $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$. Это часть прямой $x + y = a$, лежащая в первой четверти. Поскольку при любом $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $a\cos^3 t < a\cos^2 t$ и $a\sin^3 t < a\sin^2 t$, то исследуемая кривая лежит ниже этой прямой. Эскиз кривой представлен на рис. 8 *в*. □

§ 1.11. Полярная система координат и уравнения кривых в этой системе

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, луча OP, выходящего из этой точки, называемого *полярной осью*, масштаба для измерения длины и направления отсчёта углов. Положительными называем углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными — по часовой стрелке.

Полярными координатами r и φ точки M, не совпадающей с полюсом, называются расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM (см. рис. 9). Для полюса O полагаем, что $r=0$, а φ не определён. Полярный угол точки M, отличной от O, имеет бесконечно много значений, главным значением угла φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

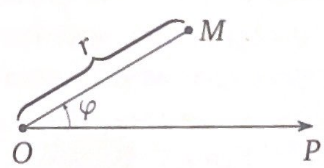


Рис. 9

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системы координат, направление полярной оси — за положительное направление оси Ox, а за ось Oy принять такую ось, что угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси Oy равен $\pi/2$ (такие системы назовём *совмещёнными*), то между декартовыми координатами x, y точки M и её полярными координатами r и φ имеют место соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$