2.127. Пусть $S_a = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = a^2\}$, $a > 0$. Какова геометрическая интерпретация множества а) $\mathbb{R} \times S_a$; б) $S_a \times S_b$, $a > b > 0$?

2.128. Пусть дан некоторый набор множеств A_s, $s \in S$, причём $A_s \subset U$ при всяком $s \in S$. Доказать, что

а) $\left(\bigcup\limits_{s\in S} A_s\right)^{\text{com}} = \bigcap\limits_{s\in S} A_s^{\text{com}}$; б) $\left(\bigcap\limits_{s\in S} A_s\right)^{\text{com}} = \bigcup\limits_{s\in S} A_s^{\text{com}}$.

✓**2.129.** Записать в виде объединения множеств множество решений неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\cos\sqrt{x} \geqslant 0$.

◇**2.130.** Найти: а) $\bigcup\limits_{a\in(0;1)} [-a; a]$; б) $\bigcap\limits_{a\in(0;1)} (-a; a)$.

◇**2.131.** Найти: а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-n; n)$; б) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.

✓**2.132.** Привести пример последовательности вложенных интервалов, пересечением которых является: а) $\{0\}$; б) $[0; 1]$; в) $\varnothing$.

✓**2.133.** Верно ли утверждение принципа вложенных отрезков (см. с. 107), если вместо каждого отрезка рассмотреть его пересечение с множеством рациональных чисел?

2.134°. Привести пример такой последовательности вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$ содержит не менее двух точек.

2.135. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Найти

1) образ множества: а) $\{0, 1\}$, б) $[0; 1]$, в) $(2; +\infty)$, г) $[-1; 1]$;

2) прообраз множества: а) $\{0, 1\}$, б) $[0; 1]$, в) $(2; +\infty)$, г) $(-2; -1] \cup [0; 3]$.

◇**2.136.** Пусть $f(x) = x^2$. Найти

1) образ множества: а) $[0; 1]$, б) $(-1; 1]$, в) $[-1; 0{,}5)$;

2) прообраз множества: а) $[0; 1]$, б) $(a; b]$, $a > 0$, в) $[-1; 1]$.

2.137. Пусть $f(x) = \sin x$. Найти

1) образ множества: а) $\{0, \pi\}$, б) $[0; \pi]$, в) $(0; 3\pi)$;

2) прообраз множества: а) $\{0\}$, б) $[0; 1]$, в) $(-\pi; \pi)$.

◇**2.138.** Пусть функция $f\colon (-1; 1) \to (-1; +\infty)$ задана формулой $f(x) = -\frac{x}{x+1}$. Пользуясь графиком этой функции, найти

1) образ множества: а) $(-1; 1)$, б) $(-1; 0]$;

2) прообраз множества: а) $[0; 1]$, б) $[-1; -0{,}5]$.

✓**2.139.** Пусть $f(x) = (x^2 - 4x)\operatorname{sgn} x$. Пользуясь графиком этой функции, найти

1) образ множества: а) $[2; 5]$, б) $(1; 2)$, в) $[1; 4]$, г) $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, д) $(0; 1) \cup (3; 5)$;

2) прообраз множества: а) $[-4; 0]$, б) $[-4; 5]$, в) $(-3; 5)$, г) $(0; 5)$.

◇**2.140.** Пусть $f(x) = x^2$. Для каждой из следующих функций выяснить, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией, если

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) $f\colon \mathbb{R} \to [0; +\infty)$; в) $f\colon [0; +\infty) \to [0; +\infty)$;
г) $f\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}$; д) $f\colon [0; 1] \to [0; 1]$; е) $f\colon [-1; 0] \to [0; 1]$.

✓**2.141.** Пусть $f(x) = \arcsin\sin x$. Для каждой из следующих функций выяснить, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией, если

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) $f\colon \mathbb{R} \to [-\pi/2; \pi/2]$; в) $f\colon [0; \pi] \to [-\pi/2; \pi/2]$;
г) $f\colon [0; \pi] \to [0; \pi/2]$; д) $f\colon [\pi/2; \pi] \to [0; \pi/2]$; е) $f\colon [-\pi/2; \pi/2] \to [-\pi; \pi]$.

2.142. Для каждой из следующих функций $f\colon [0;1]\to[0;1]$ выяснить, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией, если

✓а) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$; б) $f(x)=\sin\pi x$; ✓в) $f(x)=4(x-x^2)$;

г) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$; д) $f(x)=x^3$; е) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2.143. Верно ли, что если отображение $f\colon X\to Y$ есть

а) инъекция, то существует сюръекция $g\colon Y\to X$;

б) сюръекция, то существует инъекция $g\colon Y\to X$;

в) сюръекция, то существует такое $A\subset X$, что $f\colon A\to Y$ — биекция;

г) инъекция, то существует такое $A\subset Y$, что $f\colon X\to A$ — биекция;

д) сюръекция, то для любого $A\subset X$ отображение $f\colon A\to Y$ — сюръекция;

е) инъекция, то для любого $A\subset X$ отображение $f\colon A\to Y$ — инъекция?

◇**2.144.** Пусть отображение $f\colon X\to Y$ — инъекция. Доказать, что если $A\subset X$ и $B\subset X$, то $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

✓**2.145.** Пусть задано отображение $f\colon X\to Y$.

а) Доказать, что если $A\subset X$ и $B\subset X$, то $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

б) Доказать, что если $A\subset X$ и $B\subset X$, то $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

в) Привести пример таких множеств X, $A\subset X$, $B\subset X$ и функции $f\colon X\to\mathbb{R}$, что $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$.

г) Доказать, что если $A\subset X$, то $f(X)\setminus f(A)\subset f(X\setminus A)$.

д) Привести пример таких множеств X, $A\subset X$ и функции $f\colon X\to\mathbb{R}$, что $f(X)\setminus f(A)\neq f(X\setminus A)$.

✓**2.146.** Пусть задано отображение $f\colon X\to Y$. Доказать, что для любых множеств $A\subset Y$ и $B\subset Y$ выполнено равенство

а) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$; б) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

в) $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$.

2.147. Пусть задано отображение $f\colon X\to Y$.

а) Доказать, что если $A\subset X$, то $A\subset f^{-1}(f(A))$.

б) Доказать, что если $B\subset Y$, то $B=f(f^{-1}(B))$.

в) Привести пример таких множеств X, $A\subset X$ и функции $f\colon X\to\mathbb{R}$, что $A\neq f^{-1}(f(A))$.

2.148. Пусть A — любое подмножество области определения строго монотонной функции f. Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

✓**2.149.** Пусть заданы отображения $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, $h\colon Z\to W$. Справедливы ли следующие свойства композиции:

а) $f\circ g=g\circ f$ — *коммутативность*;

б) $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ — *ассоциативность*?

◇**2.150.** Пусть заданы отображения $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$. Доказать, что

а) если f и g — инъекции, то $g\circ f$ — инъекция;

б) если f и g — сюръекции, то $g\circ f$ — сюръекция;

в) если f и g — биекции, то $g\circ f$ — биекция.

2.151. Пусть заданы отображения $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$. Верно ли, что

✓а) если $g\circ f$ — инъекция, то f и g — инъекции;

б) если $g\circ f$ — сюръекция, то f и g — сюръекции;

в) если $g\circ f$ — биекция, то f и g — биекции?

2.152. Пусть заданы отображения $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$. Доказать, что если $g \circ f$ и $h \circ g$ — биекции, то отображения f, g, h также биекции.

◇ **2.153.** Пусть заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$. Доказать, что если $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{id}_X$, то отображения f и g — биекции и взаимно обратны.

✓ **2.154.** Привести пример такого множества X и отображений $f, g\colon X \to X$, что $f \circ g = \mathrm{id}_X$, но $g \circ f \neq \mathrm{id}_X$.

2.155. Найти какие-либо нетождественные функции $f\colon X \to X$, удовлетворяющие равенству $f \circ f = \mathrm{id}_X$, где X есть множество: а) $\{1, 2\}$; б) $\mathbb{N}$; в) $\mathbb{R}$.

2.156*. Существуют ли функции f и g, определённые на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$?

2.157*. Привести пример хотя бы одной функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющей тождеству $f(f(n)) = n^2$.

2.158*. Задана последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ Всегда ли существует конечный набор функций $f_1, \ldots f_N$, композициями которых можно записать любой из этих многочленов?

2.159°. Выяснить, какие из свойств — рефлексивность, симметричность и транзитивность — выполняются для отношений на множестве X:

а) $a = b$, X — любое; б) $a \neq b$, X — любое; в) $a \leqslant b$, $X = \mathbb{R}$;

г) a делится на b, $X = \mathbb{N}$;

д) $a \parallel b$, X — множество прямых на плоскости или в пространстве;

е) $a \perp b$, X — множество прямых на плоскости или в пространстве;

ж) $f = g$ всюду за возможным исключением одной точки, X — множество функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

2.160. Привести пример отношения, не обладающего ни одним из свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности: а) на множестве действительных чисел; б) на множестве векторов на плоскости.

✓ **2.161.** Выяснить, являются ли следующие отношения отношениями эквивалентности:

а) отношение равенства векторов на плоскости;

б) отношение включения множеств;

в) отношение равенства функций всюду за исключением конечного числа точек;

г) отношение равенства функций всюду за исключением не более чем десяти точек.

◇ **2.162.** Доказать, что если $a \sim b$, то классы эквивалентности элементов a и b совпадают.

◇ **2.163.** Равномощны ли множества A и B:

а) $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$; б) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \cup \{0\}$; в) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$?

✓ **2.164.** С помощью явного задания биекции $f\colon A \to B$ показать, что $A \sim B$:

а) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; б) $A = [0; 1)$, $B = (0; 1]$;

в) $A = [a; b]$, $B = [c; d]$; г) $A = (0; 1)$, $B = \mathbb{R}$;

д) $A = [0; 2\pi)$, $B = S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

2.90. *Указание.* Для доказательства левого неравенства воспользоваться равенством из задачи 2.59, а для правого — оценкой $C_n^k \leqslant \dfrac{n^k}{k!}$ и задачей 2.88.

2.93. *Указание.* Пользуясь неравенством Бернулли, показать, что
$$\frac{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}{p+1} < n^p < \frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}.$$

2.99. *Указание.* Применить неравенство $G_n \leqslant A_n$ к числам $\dfrac{1}{x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

2.100. *Указание.* Положить в неравенстве Коши — Буняковского $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$.

2.101. *Указание.* Применить неравенство $G_n \leqslant A_n$.

2.103. *Указание.* Воспользоваться неравенствами о средних (см. задачи 2.98 и 2.99).

2.104. *Указание.* Рассмотреть дискриминант квадратного трёхчлена $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k\lambda - y_k)^2$ от переменной λ.

2.106. *Указание.* Возвести неравенство в квадрат и воспользоваться неравенством Коши — Буняковского.

2.108. а) *Указание.* Воспользоваться принципом полной индукции и равенством
$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k^m = \sum_{k=1}^{n} k(S_m(k)-S_m(k-1)) = nS_m(n) - \sum_{k=1}^{n-1} S_m(k).$$

2.112. а) Например, $A=(0;\,3)$; $B=(1;\,5)$. б) Например, $A=[0;\,10]$; $B[0;\,7]$; $C=[5;\,10]$. в) Например, $A=[0;\,1]$; $B=[1/2;\,2]$; $C=[2/3;\,3/4]$; $D=[0;\,2]$.

2.115. Пусть $x\in A\setminus(B\cup C)=D$. Это значит, что $x\in A$, но $x\notin B\cup C$, т.е. 1) $x\in A$, но 2) $x\notin B$ и 3) $x\notin C$. Из 1) и 2) следует, что $x\in A\setminus B$, а отсюда и из 3) следует, что $x\in(A\setminus B)\setminus C$. Итак, $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$. С другой стороны, пусть $x\in(A\setminus B)\setminus C$, тогда $x\in A\setminus B$, но $x\notin C$, т.е. 1) $x\in A$, но 2) $x\notin B$ и 3) $x\notin C$. Из 2) и 3) следует, что $x\notin B\cup C$, отсюда и из 1) следует, что $x\in A\setminus(B\cup C)$, т.е. $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C)$. Тем самым доказано равенство множеств $(A\setminus B)\setminus C$ и $A\setminus(B\cup C)$.

2.117. б) Например, $A=B=C=\{1\}$, $D=\{2\}$.

2.118. б) Например, $A=[0;\,2]$, $B=[2;\,4]$, $C=[1;\,3]$, $D=[2{,}5;\,5]$.

2.122. Например, $A=[0;\,1]$, $B=[0;\,2]$.

2.127. Возможные интерпретации: а) цилиндрическая поверхность; б) тор.

2.129. а) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\,\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$; б) $\left[0;\,\dfrac{\pi^2}{4}\right]\cup\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left[\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2;\,\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\right]$.

2.130. а) $(-1;\,1)$; б) $\{0\}$. **2.131.** а) $\mathbb{R}$; б) $\{0\}$.

2.132. а) Например, $\left(-\dfrac{1}{n};\,\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$; б) например, $\left(-\dfrac{1}{n};\,1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$; в) например, $\left(1;\,\dfrac{n+1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

2.133. Нет. Например, рассмотреть множества $\left[\sqrt{2}-\dfrac{1}{n};\,\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}\right]\cap\mathbb{Q}$, $n\in\mathbb{N}$.

2.134. Например, $\left[-\dfrac{1}{n};\,1+\dfrac{1}{n}\right]$, $n\in\mathbb{N}$.

2.135. 1) а) $\{0,\,1\}$, б) $\{0,\,1\}$, в) $\{1\}$, г) $\{0,\,1,\,-1\}$; 2) а) $[0;\,+\infty)$, б) $[0;\,+\infty)$, в) $\varnothing$, г) $\mathbb{R}$.

2.136. 1) $[0;\,1]$; 2) а) $[-1;\,1]$, б) $[-\sqrt{b};\,-\sqrt{a})\cup(\sqrt{a};\,\sqrt{b}]$, в) $[-1;\,1]$.

2.137. 1) а) $\{0\}$, б) $[0;\,1]$, в) $[-1;\,1]$; 2) а) $\{\pi n\colon n\in\mathbb{Z}\}$, б) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[2\pi n;\,\pi+2\pi n]$, в) $\mathbb{R}$.

2.138. 1) а) $(-0{,}5;\,+\infty)$, б) $[0;\,+\infty)$; 2) а) $[-0{,}5;\,0]$, б) $\varnothing$.

2.139. 1) а) $[-4;\,5]$, б) $(-4;\,-3)$, в) $[-4;\,0]$, г) $[-4;\,0]$, д) $(-3;\,5)$; 2) а) $[2-2\sqrt{2};\,4]$, б) $[2-2\sqrt{2};\,5]$, в) $(2-\sqrt{7};\,1)\cup(3;\,5)$, г) $(4;\,5)$.

2.140. а) Не инъекция, не сюръекция; б) не инъекция, сюръекция; в) биекция; г) инъекция, не сюръекция; д) биекция; е) биекция.

2.141. а) Не инъекция, не сюръекция; б) не инъекция, сюръекция; в) не инъекция, не сюръекция; г) не инъекция, сюръекция; д) биекция; е) инъекция, не сюръекция.
2.142. а) Инъекция, не сюръекция; б) не инъекция, сюръекция; в) не инъекция, сюръекция; г) биекция; д) биекция; е) инъекция, не сюръекция.
2.143. а) Да; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) да.
2.145. в) Например, $X=\mathbb{R}$, $A=[0;+\infty)$, $B=(-\infty;0]$, $f(x)=x^2$;
д) например, $X=\mathbb{R}$, $A=[0;+\infty)$, $f(x)=1$.
2.147. в) Например, $X=\mathbb{R}$, $A=[0;\pi]$, $f(x)=\cos x$. **2.148.** $A=f^{-1}(f(A))$.
2.149. а) Нет; б) да. **2.151.** а) Нет; б) нет; в) нет.
2.155. Например: а) $f(1)=2$, $f(2)=1$; б) $f(2n-1)=f(2n)$, $f(2n)=2n-1$, $n\in\mathbb{N}$; в) $f(x)=-x$.
2.156. Нет. *Указание.* Рассмотреть числа $y_1=f(-1)$, $y_2=f(0)$ и $y_3=f(1)$.
2.157. Например, $f(1)=1$, $f(n_k^{2^m})=n_{k+1}^{2^m}$, если k чётно, и $f(n_k^{2^m})=n_{k-1}^{2^{m+1}}$, если k нечётно, где $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и n_k — все натуральные числа, не являющиеся точными квадратами, занумерованные в порядке возрастания.
2.158. Всегда. *Указание.* Рассмотреть $P_n(\operatorname{tg} x)$.
2.159. а) Все три; б) только симметричность; в), г) все, кроме симметричности; д) все три; е) только симметричность; ж) все, кроме транзитивности.
2.160. а) например, $a=b+1$, б) например, «$\vec{a}$ получается из $\vec{b}$ поворотом на прямой угол по часовой стрелке».
2.161. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **2.163.** а) Нет; б) да; в) да.
2.164. Например, а) $f(n)=2n$; б) $f(x)=1-x$; в) $f(x)=c+\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$; г) $f(x)=\operatorname{ctg}\pi x$; д) $f(t)=(\cos t,\sin t)$.
2.168. Например, пусть $\varphi_1(x)$ взаимно однозначно отображает $[0;1]$ на $\left(a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ (ср. с предыдущей задачей), а $\varphi_2(x)=\operatorname{arctg}(x-1)\cdot\dfrac{b-a}{\pi}+\dfrac{a+b}{2}$. Искомое отображение есть $\varphi_1(x)$ на $[0;1]$ и $\varphi_2(x)$ на $(1;+\infty)$.
2.171. *Указание.* Множество $A\setminus B$ является бесконечным подмножеством счётного множества A, значит, оно счётно.
2.173. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
2.175. Например, $(m,n)\mapsto\dfrac{(m+n-1)(m+n)}{2}-n+1$.
2.177. *Указание.* Каждый такой квадрат однозначно определяется шестью рациональными числами: координатами трёх его вершин.
2.180. *Указание.* а) Воспользоваться утверждением задачи 2.174. б) Воспользоваться предыдущим пунктом.
2.182. Например, $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)2^k\Big)$.
2.185. *Указание.* Рассмотреть функцию $f\colon 2^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}^\infty$, $f(M)=\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n=1$, если $n\in M$, и $\varepsilon_n=0$, если $n\notin M$.
2.186. *Указание.* Рассмотреть функцию
$$f\colon\{0,1\}^\infty\to(\{0,1\}^\infty)^2,\quad f(\{\varepsilon_n\})=(\{\varepsilon_{2n-1}\},\{\varepsilon_{2n}\}).$$
2.187. *Указание.* Воспользоваться задачами 2.182 и указанием к задаче 2.186.
2.189. *Указание.* Воспользоваться задачами 2.186 и 2.188.
2.191. *Указание.* Показать, что это множество равномощно некоторому подмножеству множества $\mathbb{Q}$.
2.193. Можно. **2.194.** *Указание.* Использовать утверждение задачи 2.191.
2.195. *Указание.* Воспользоваться задачей 2.173.
2.196. *Указание.* Воспользоваться задачами 2.173 и 2.180б.

✓**1.642.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (*циклоида*).

1.643. $x = \sin t$, $y = \sin 2t$. ◇**1.644.** $x = a\cos 2t$, $y = a\sin 3t$.

1.645. $x = \sin 3t$, $y = \cos t$. **1.646.** $x = a\cos 4t$, $y = a\cos 3t$.

◇**1.647.** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. ✓**1.648.** $x = 2^t \sin t$, $y = 2^t \cos t$.

✓**1.649.** $x = (\log_2 t)\sin t$, $y = \cos t$. **1.650.** $x = \operatorname{arctg} t$, $y = t^3 - t$.

1.651. $x = \arcsin(\sin t)$, $y = \arccos(\cos t)$.

Преобразовать к полярным координатам уравнение кривой (1.652—1.659).

1.652°. $x = 3$. **1.653°.** $y = 5$. ✓**1.654.** $y = 2x$.

◇**1.655°.** $x^2 + y^2 = 4$. ✓**1.656.** $x^2 + y^2 = x$. **1.657.** $x^2 + y^2 = 4y$.

1.658. $x^2 + y^2 = (x^2 - y^2)^2$. **1.659.** $(x^2 + y^2)^2 = xy^2 + yx^2$.

1.660. Преобразовать к полярным координатам уравнение прямой $ax + by = c$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

Преобразовать к декартовым координатам уравнение кривой (1.661—1.668).

1.661°. $r\cos\varphi = 3$. **1.662°.** $r\sin\varphi = 2$. **1.663°.** $r = \sqrt{2}$.

◇**1.664.** $r = 2\sin\varphi$. **1.665.** $r = 2\cos\varphi$. ✓**1.666.** $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

✓**1.667.** $r^2 \sin 2\varphi = 2$. **1.668.** $r = \cos^2\varphi$. ✓**1.669.** $r = \dfrac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$.

Построить эскиз графика функции r, заданной в полярной системе координат, $a > 0$ (1.670—1.683).

1.670°. $r(\varphi) = \dfrac{1}{\cos\varphi}$. **1.671°.** $r(\varphi) = \dfrac{2}{\sin\varphi}$.

✓**1.672.** $r(\varphi) = a\varphi$ (*спираль Архимеда*).

✓**1.673*.** $r(\varphi) = \dfrac{a}{\varphi}$ (*гиперболическая спираль*).

✓**1.674.** $r = a3^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*).

1.675. $r(\varphi) = \sin\varphi$. **1.676.** $r(\varphi) = \cos\varphi$. **1.677.** $r(\varphi) = \cos 2\varphi$.

◇**1.678.** $r(\varphi) = \cos 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*).

1.679. $r(\varphi) = \cos 5\varphi$. **1.680.** $r(\varphi) = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

◇**1.681.** $r(\varphi) = 1 - \cos\varphi$ (*кардиоида*).

✓**1.682.** $r(\varphi) = 1 + 2\cos\varphi$. (*улитка Паскаля*).

1.683*. $r(\varphi) = \dfrac{1}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$.

Построить эскиз графика функции φ, заданной в полярной системе координат, $a > 0$ (1.684—1.687).

1.684. $\varphi(r) = \dfrac{\pi}{3}$. **1.685.** $\varphi(r) = 4r - r^2$.

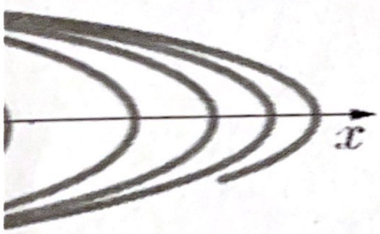
1.686. $\varphi(r) = \dfrac{12r}{1 + r^2}$. **1.687.** $\varphi(r) = 2\pi \sin r$.

1.688. Построить эскиз кривой $r^2 + \varphi^2 = a^2$, заданной уравнением в полярной системе координат, $a > 0$.

Построить эскиз кривой, заданной уравнением (1.689—1.691).

1.689. $x^2 + y^2 = x + 2$. ✓**1.690.** $x^2 + y^2 = x + y$. **1.691.** $[x] + [y] = 1$.

1.643.



1.654. $\operatorname{tg}\varphi = 2,\ r = 0.$ **1.656.** $r = \cos\varphi.$ **1.666.** $x = y,\ x > 0.$ **1.669.** $x + y = 1.$