2.202. *Прямым произведением* $\prod\limits_{s\in S} A_s$ бесконечного набора множеств A_s, $s\in S$, называется множество всех функций, сопоставляющих каждому элементу $s\in S$ элемент множества A_s. Пусть $A_s\sim B_s$ при всех $s\in S$. Доказать, что $\prod\limits_{s\in S} A_s\sim\prod\limits_{s\in S} B_s$.

2.203*. Доказать, что множества $\mathbb{N}^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$ континуальны.

2.204*. Доказать, что объединение континуального набора континуальных множеств является континуальным множеством.

2.205*. Пусть множество $A\cup B$ равномощно отрезку $[0; 1]$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B равномощно отрезку $[0; 1]$.

✓**2.206**°. Привести пример ограниченного сверху множества $A\subset\mathbb{R}$, удовлетворяющего условию: а) $\sup A\in A$; б) $\sup A\notin A$.

2.207°. Пусть $A\subset\mathbb{R}$ и $m=\min A$. Доказать, что $m=\inf A$.

✓**2.208**°. Пусть $A\subset B\subset\mathbb{R}$. Доказать, что $\inf A\geqslant\inf B$ и $\sup A\leqslant\sup B$.

2.209°. Пусть $A\subset B\subset\mathbb{R}$ и множество A не ограничено сверху. Доказать, что множество B также не ограничено сверху.

Найти точную верхнюю или нижнюю грань множества (2.210—2.218).

2.210°. $\sup\left\{\dfrac{2m}{3n}\,|\,m,n\in\mathbb{N},\ m<n\right\}$. ◇ **2.211.** $\sup\left\{\dfrac{2+m}{3+n}\,|\,m,n\in\mathbb{N},\ m\leqslant n\right\}$.

✓**2.212.** $\inf\left\{\dfrac{5+m}{3+n}\,|\,m,n\in\mathbb{N},\ m\geqslant n\right\}$. **2.213.** $\sup\left\{\dfrac{3+m}{2+n}\,|\,m,n\in\mathbb{N},\ m\leqslant n\right\}$.

✓**2.214.** $\sup\left\{\dfrac{1+m}{3+2n}\,|\,m,n\in\mathbb{N},\ m\leqslant n\right\}$. **2.215.** $\sup\left\{\dfrac{m^2}{m^2+3m+5}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}$.

2.216. $\inf\left\{\dfrac{m^2}{2m^2-4m+3}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}$. **2.217**°. $\sup\left\{\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

2.218*. $\sup\left\{\sin\dfrac{2m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{N},\ m\leqslant n\right\}$.

◇ **2.219.** Пусть $A\subset\mathbb{R}$ и $B=\{-a\colon a\in A\}$. Доказать равенства $\inf A=-\sup B$ и $\sup A=-\inf B$.

✓**2.220.** Пусть $A, B\subset\mathbb{R}$, $C=\{a+b\colon a\in A, b\in B\}$, $D=\{a-b\colon a\in A, b\in B\}$. Доказать равенства $\sup C=\sup A+\sup B$ и $\sup D=\sup A-\inf B$.

✓**2.221**°. Пусть $A\subset\mathbb{R}$ и для всякого $k>0$ положим $A_k=\{ka\colon a\in A\}$. Доказать равенства $\sup A_k=k\sup A$ и $\inf A_k=k\inf A$.

2.222. Пусть $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\varnothing$, $\inf A>0$ и $B=\left\{\dfrac{1}{a}\colon a\in A\right\}$. Доказать, что $\sup B=\dfrac{1}{\inf A}$.

2.223. Пусть A и B — непустые подмножества луча $(0; +\infty)$, $C=\{ab\colon a\in A, b\in B\}$. Доказать, что $\sup C=\sup A\cdot\sup B$.

2.224. Доказать, что $\sup A\cup B=\max(\sup A, \sup B)$.

2.225°. Найти $\inf\limits_{x\in A} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in A} f(x)$, если

✓а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $A=(0; 1]$; б) $f(x)=2^{-x}$, $A=(0; +\infty)$;
✓в) $f(x)=\{x\}$, $A=[0; 2]$; г) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $A=\mathbb{R}$;
д) $f(x)=\log_2 x$, $A=(0; 1)$; е) $f(x)=1+\sin^2 x$, $A=\mathbb{R}$;
✓ж) $f(x)=\log_2\log_2 x$, $A=(1; +\infty)$; з) $f(x)=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $A=\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Найти точную верхнюю или нижнюю грань функции (2.226—2.231).

2.226°. $\sup\limits_{x\geqslant 3} \dfrac{x-3}{x^2+x-12}$. ◇ **2.227.** $\inf\limits_{x\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{x} - \cos x\right)$.

√**2.228.** $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} (\operatorname{arctg} x - 1)^2$. √**2.229.** $\inf\limits_{x\neq 2} \dfrac{2-x}{x^3-6x^2+13x-10}$.

2.230. $\sup\limits_{x>0} (\sqrt{x^2+1} - x)$. **2.231.** $\sup\limits_{x>0} (\sqrt{x^2+x} - x)$.

2.232°. Доказать, что $\inf\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in A} f(x)$, причём равенство возможно только если $f(x)\equiv \mathrm{const}$ на A.

√**2.233°.** а) Пусть $A\subset B\subset D(f)$. Доказать, что

$$\inf_{x\in A} f(x) \geqslant \inf_{x\in B} f(x) \quad \text{и} \quad \sup_{x\in A} f(x) \leqslant \sup_{x\in B} f(x).$$

б) Привести пример функции $f\colon [0;1]\to\mathbb{R}$, для которой $\inf\limits_{x\in(0;1]} f(x) > \inf\limits_{x\in[0;1]} f(x)$.

2.234°. Пусть $f\colon A\to\mathbb{R}$. Доказать, что

а) $\inf\limits_{x\in A} (-f(x)) = -\sup\limits_{x\in A} f(x)$; б) $\sup\limits_{x\in A} (f(x)+c) = c + \sup\limits_{x\in A} f(x)$ для любого $c\in\mathbb{R}$.

2.235. Пусть $f, g\colon A\to\mathbb{R}$.

а) Доказать, что $\sup\limits_{x\in A} (f(x)+g(x)) \leqslant \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

б) Доказать, что $\sup\limits_{x\in A} (f(x)+g(x)) \geqslant \sup\limits_{x\in A} f(x) + \inf\limits_{x\in A} g(x)$, если функция $g(x)$ ограничена снизу.

в) Привести пример таких функций f, g и множества A, для которых выполнено неравенство $\sup\limits_{x\in A} (f(x)+g(x)) < \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

2.236. Пусть $f\colon A_1\times A_2\to\mathbb{R}$. Доказать, что

а) $\sup\limits_{x_1\in A_1} \Bigl(\sup\limits_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2)\Bigr) = \sup\limits_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2} f(x_1,x_2)$;

б) $\sup\limits_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2} (f(x_1)+f(x_2)) = \sup\limits_{x_1\in A_1} f(x_1) + \sup\limits_{x_2\in A_2} f(x_2)$.

√**2.237°.** Найти все граничные точки множества A, если

а) $A=\varnothing$; б) $A=\{1\}$; в) $A=\{1, 2, \ldots, n\}$;
г) $A=\mathbb{N}$; д) $A=\mathbb{Z}$; е) $A=\mathbb{R}$;
ж) $A=(a;b)$; з) $A=[a;b]$; и) $A=[a;b)$.

2.238. Найти все граничные точки множества A, если

◇а) $A=(0;1]\cup\{2\}$; √б) $A=\left\{\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$; в) $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n;n+1)$;

г) $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[n-10;3^n]$; д) $A=\mathbb{Q}$; е) $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

√**2.239°.** Доказать, что $\partial A = \partial A^{\mathrm{com}}$.

◇**2.240.** Пусть множество A ограничено сверху и $s=\sup A$. Доказать, что s — граничная точка множества A.

√**2.241.** Пусть $a<b$, $a\in A$, $b\notin A$. Доказать, что на отрезке $[a;b]$ найдётся хотя бы одна граничная точка множества A.

2.242. Перечислить все множества $A\subset\mathbb{R}$, для которых $\partial A=\varnothing$.

2.243. Пусть $A\subset B$. Верно ли, что $\partial A\subset\partial B$?

√**2.244.** Доказать, что

а) $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$; б) $\partial(A\cap B)\subset\partial A\cup\partial B$; в) $\partial(A\setminus B)\subset\partial A\cup\partial B$.

2.197. *Указание.* Множество A счётно, поэтому множество B значений $|x_n - x_m|$, где $x_n, x_m \in A$, не более чем счётно (почему?); следовательно, найдётся число a, не входящее в B, т. е. $x_n + a \neq x_m$ ни для каких $x_n, x_m \in A$.

2.198. а) *Указание.* Если $A_n = A \cap [-n; n]$, $n \in \mathbb{N}$, то $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. б) Например, $\mathbb{N}$.

2.203. *Указание.* Воспользоваться задачами 2.187 и 2.202.

2.204, 2.205. *Указание.* Воспользоваться теоремой Кантора — Бернштейна.

2.206. а) $A = (-1; 1) \cup \{2\}$, $A = (-1; 1]$; б) $A = [0; 2)$.

2.210. $\frac{2}{3}$. **2.211.** 1. **2.212.** 1. **2.213.** $\frac{4}{3}$. **2.214.** $\frac{1}{2}$. **2.215.** 1. **2.216.** $\frac{1}{2}$.

2.217. 1. **2.218.** 1.

2.225. а)–в) 0; 1; г) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; д) $-\infty$; 0; е) 0; 2; ж) $-\infty$; $+\infty$; з) $\frac{5}{3}$; $+\infty$.

2.226. $\frac{1}{7}$. **2.227.** -1. **2.228.** $(\pi/2+1)^2$. **2.229.** -1. **2.230.** 1. **2.231.** $\frac{1}{2}$.

2.233. б) Например, $f(x) = \operatorname{sgn} x$. **2.235.** в) $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $A = [0; 1]$.

2.237. а) $\varnothing$; б) $\{1\}$; в) $\{1, 2, \ldots, n\}$; г) $\mathbb{N}$; д) $\mathbb{Z}$; е) $\varnothing$; ж)–и) $\{a; b\}$.

2.238. а) $\{0, 1, 2\}$; б) $A \cup \{0\}$; в) $\mathbb{N}$; г) $\varnothing$; д), е) $\mathbb{R}$.

2.241. *Указание.* Рассмотреть $\sup\{x \in [a; b] : x \in A\}$.

2.242. $\varnothing$ и $\mathbb{R}$. **2.243.** Нет, например, $A = [0; 1]$, $B = [0; +\infty)$.

2.248. Например, а) $(a; b)$; б) $[a; b]$; в) $[a; b)$; г) $\mathbb{R}$. **2.249.** Нет.

2.251. а) Нет, см. задачу 2.247; б) да, например, $\mathbb{N}$; в) да, например, $\mathbb{Q}$; г) нет, поскольку счётное множество состоит из граничных точек (см. задачу 2.245).

2.252. $\mathbb{R}$, $\varnothing$. *Указание.* Показать, что у каждого такого множества нет граничных точек, и воспользоваться задачей 2.241.

2.253. Например, $G_n = \left(-\frac{n+1}{n}; \frac{n+1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $A = [-1; 1]$.

2.254. Например, $F_n = \left[-\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $A = (-1; 1)$.

2.256. *Указание.* Любой интервал $(a; b)$ можно представить в виде

$$(a; b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

2.257. *Указание.* Пусть U — открытое множество. Ввести на U отношение эквивалентности $a \sim b \Leftrightarrow [a; b] \subset U$ и ... множества на классы