02.09.2022 Алгебра, лекция (Клячко А.А.)

1) Системы линейных уравнений!
2) Многочлен
3) Абстрактные структуры

3 темы первого семестра

книги: Винберг „Курс А", Кострикин „Введение в А", Курош „Лекции по А"

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{---} \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

с таким же мн-вом решений

Решить - написать эквивалентную систему, в которой часть неизвестных выражена ч/з остальные

[$\{x + 2y = 3$ Ответ: $x = 3 - 2y, y \in \mathbb{R}$]

главные неизвестные ч/з свободные неизвестные

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & & & \vdots \\ \text{---} & & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

матрица коэф системы, $m \times n$

расширенная матрица ($m \times n+1$)

Элементарные преобразования строк

I. $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i + \lambda v_j \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$

II. $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_i \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

III. $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ $i \neq j$

Утв 1

при элементарном преобраз. строк расширенной матрицы система лин. ур. (СЛУ) превращается в эквивалентную

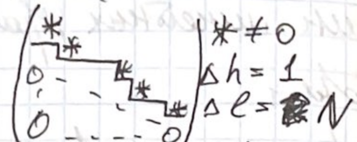
мн-во решений не меняется,
все преобраз. обратимы (было решение, осталось)

[все ли системы (эквив) получ. друг из друга преобразов? → НЕТ]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

упр* Обратное верно, если есть хоть одно решение (система совместна)

опр. Матрица ступенчатая, если

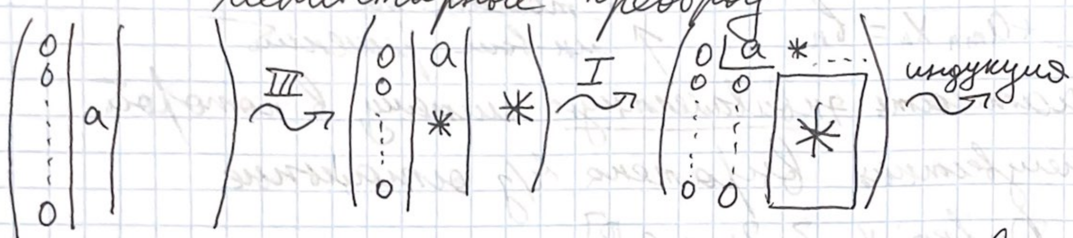


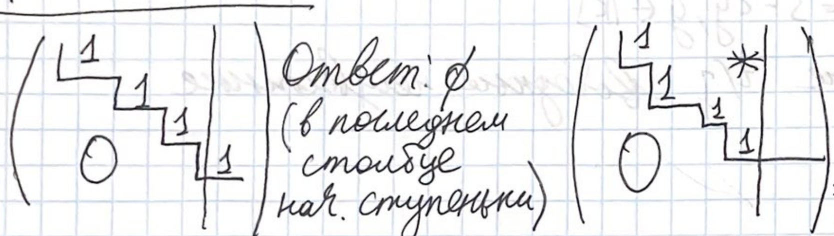
1) нулевые строки внизу

2) первый ненулевой эл-мент в каждой строке строго правее предыдущего

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Утв 2: любую матрицу можно привести к ступ. ч/з элементарные преобраз.





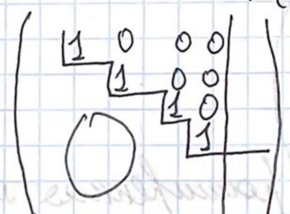
Ответ: $\varnothing$ (в последнем столбце нач. ступеньки)

если в последнем нет ступенек

$\downarrow$

главные неизв. = начала ступенек (каждое главное с нуля ч/з свободные)

Улучшенный ступенчатый вид $\longrightarrow$



09.09.2022 Ал, лекция

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5x+6y+7z=8 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & +1 & +2 & +3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

СЛУ совместна $\Leftrightarrow$ в ступенчатом виде расширенной матрицы в последнем столбце нет начала ступени

СЛУ определена (единств. реш.) $\Leftrightarrow$ в ступенчатом виде расширенной матрицы ступеньки начинаются во всех столбцах, кроме последнего

$V \times V \xrightarrow{\text{"+"}} V$ (например $V = \mathbb{R}^3$) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} \right.$

$\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\text{"}\cdot\text{"}} V$ $\left. 4 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} \right)$

$\forall u, v, w \in V$

1) $(u+v)+w = u+(v+w)$
2) $\exists \bar{0} : \forall v \quad v+\bar{0} = \bar{0}+v = v$
3) $\forall u \ \exists \underset{(-u)}{v} : u+v = \bar{0} = v+u$
4) $\forall u, v \quad u+v = v+u$

*абелева группа

5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
6) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
7) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
8) $\forall v \in V \quad v \cdot 1 = v$

Вещественное векторное пр-во

$\to$ мн-во V с двумя операциями: • "+": $V \times V \to V$, • "$\cdot$": $\mathbb{R} \times V \to V$, на к-рых работают 8 св-в

Примеры

1) $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ — n-мерное арифмет. век. пр-во над $\mathbb{R}$

2) $\{ f : [0;1] \to \mathbb{R} \} = F$

эл-ты пр-ва – векторы ($\theta = \bar{0}$ – нулевой)

Утв $\bar{0}$ – единственный ($\Gamma\ \bar{0}$ и $\bar{0}' \Rightarrow \bar{0} + \bar{0}' = \bar{0} = \bar{0}' \Rightarrow \boxtimes$)

Утв $-u$ – единственный (из 3)

Утв $\forall v \in V \quad 0 \cdot v = \bar{0}$

$\underset{\underset{(0+0)v}{\|}}{0 \cdot v} = \bar{0}$

$0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v = \bar{0}$

$\underset{\underset{0 \cdot v}{\|}}{(1+(-1)) \cdot v} \overset{⑥}{=} 1 \cdot v + (-1) \cdot v \overset{⑧}{=} v + (-1) \cdot v = \bar{0}$

$(-1) \cdot 1) v = -1 \cdot (1 \cdot v)$
$= -v$

$$0\cdot v = (0+0)\cdot v \overset{(6)}{=} 0\cdot v + 0\cdot v$$

$$\underbrace{0\cdot v + (-(0\cdot v))}_{\overset{(3)}{=}\ \bar{0}} = (0\cdot v + 0\cdot v) + (-0\cdot v) \overset{(1)}{=} 0\cdot v + (0\cdot v + (-0\cdot v)) = 0\cdot v + \bar{0} = 0\cdot v$$

V – в.п. над $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ ЛЗ если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \exists \lambda_i \neq 0$:
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$

$v_1, \dots, v_n$ – Л.Н. если $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $\exists \lambda_i \neq 0$: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \neq \bar{0}$

Утв. $V \ni v_1, \dots, v_n$ Л.З. $\Leftrightarrow \exists i$ v_i лин. выр. ч/з ост

$X \subseteq V$ $\langle X \rangle$ – линейная оболочка

опр $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; \begin{matrix} k \in \mathbb{N} \\ \lambda_i \in \mathbb{R} \\ x_i \in X \end{matrix} \right\} = \langle X \rangle$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v_i \in \langle v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_n \rangle$

12.09.2022 Алгебра, лекция

Утв $v_1, \dots, v_k \in V$ (V - в.п. над $\mathbb{R}$)

л.з. $\Longleftrightarrow \exists i: v_i \in \langle v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_k \rangle \overset{\text{опр}}{=} \{ \sum_{1=j\neq i}^{k} \lambda_j v_j \mid \lambda_j \in \mathbb{R} \}$

Д-во:

"$\Rightarrow$" $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = \theta$, $\exists_i \lambda_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j$

"$\Leftarrow$" $v_i = \sum_{j\neq i} \mu_j v_j \Rightarrow \sum_{j \neq i} \mu_j v_j + (-1) v_i = \theta \Rightarrow$ ☑
$(-1 \neq 0)$

Основная лемма о л.з.

$v_1, \dots, v_n \in V$ $\quad w_1, \dots, w_m \in V$ и $v_1, \dots, v_n \in \langle w_1, \dots, w_m \rangle$

$m < n \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ л.з.

Д-во: $v_i = \sum \mu_{ji} w_j$

$$\sum \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{ji} w_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{ji} \right) w_j \overset{?}{=} \theta$$

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} = 0}$ $\forall j = 1, \dots, m$ $\quad$ m ур-ний, n неизвестных

СЛУ отн. $\lambda_1, \dots$ $\quad$ $\Downarrow$

есть свободные переменные

$\Rightarrow$ можно их взять ненулевыми

есть ненулевое решение

$\Downarrow$

есть л.з. $\lambda_i v_i$

Базис в ~~системы~~ мн-ва **векторов** $X \subset V$

— это ~~максимальное~~ максимальное по включению л.н. подмн-во

- $B \subseteq X$
- B л.н.
- нельзя добавить ничего, $\begin{cases} B \subseteq B' \subseteq X \\ B' \text{ л.н.} \end{cases} \Rightarrow B' = B$

Утв. $B \subseteq X \subseteq V$ - в.п. над $\mathbb{R}$

базис в $X \Longleftrightarrow$ 1) B л.н. 2) $X \subseteq \langle B \rangle$

[Пример $\quad X = \{ \binom{1}{0}; \binom{1}{1} \} \quad \langle X \rangle = \mathbb{R}^2$]

Д-во: "$\Rightarrow$" 1 по опр

$B \cup \{x\} \Rightarrow$ по опр л.з. $(x \in X, x \notin B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \mu x = \theta \quad b_i \in B \quad \lambda_i, \mu \in \mathbb{R}$

b_i попарно разные (либо $\forall \lambda_i = 0$); λ_i, μ не все нули

1) $\mu = 0 \Rightarrow B$ — л.з. $\Rightarrow$ неправда

2) $\mu \neq 0 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\mu} b_i \Rightarrow \blacksquare$

"$\Leftarrow$" $\begin{cases} B \subset B' \subseteq X \\ B \neq B' \end{cases} \Rightarrow b' : b' \in B', b' \notin B \Rightarrow b' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \quad b_i \in B, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$

расширим $B \Rightarrow$ л.з.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i + (-1) b' = \theta \Rightarrow B'$ л.з. $\Rightarrow \blacksquare$

Утв. V — в.п., $X \subseteq V$, B и B' — базисы X конечные ($|B| < \infty$) $\rightarrow$ [* можно убрать] [тогда равномощные]

Тогда $|B'| = |B|$

Д-во: $B' \subseteq \langle B \rangle$ (л.н.) $\xRightarrow{\text{по основной лемме}}$ $|B'| \leq |B|$

ан-но $B \subseteq \langle B' \rangle \Rightarrow |B| \leq |B'|$

Переформулировка О.Л.О л.з.

Если $v_1, \ldots, v_n$ л.н. и $v_1, \ldots, v_n \in \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$

$\Rightarrow m \geq n$ [Если $A \rightarrow B$, то $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$]

$rk(X)$ = число векторов в базисе (ранг)

$rk(\mathbb{R}^n) = n$ (размерность) $\dim V \overset{\text{опр}}{=} rk\, V$

16.09.2022 Алгебра лекция

$\mathrm{rk}\, X = \dim\langle X\rangle \longrightarrow$ и $\leq$ очевидно, т.к. $X \subseteq \langle X\rangle$

$X \subseteq V$ - в.п.

$\geq$ т.к. $\underset{\text{базис}}{B} \subseteq X \Rightarrow$ $X \subseteq \langle B\rangle$ } навесим $\langle\rangle$ и $\langle X\rangle \subseteq \langle B\rangle$ и $B \subseteq X \Rightarrow \langle B\rangle \subseteq \langle X\rangle$ $\Rightarrow \langle X\rangle = \langle B\rangle$

Б - базис в $\langle X\rangle = \langle B\rangle \supseteq \underset{\text{л.н. вектора}}{Б}$

$\overset{\text{по}}{\Rightarrow}_{\text{ОЛ}\circ\text{ЛЗ}}\ \underset{\mathrm{rk}\, X}{|B|} \geq \underset{\dim\langle X\rangle}{|Б|}$

ОЛ о ЛЗ на оценке рангов

$X \subseteq V \supseteq Y$, $X \subseteq \langle Y\rangle$ (члены выражаются через) $\Rightarrow \mathrm{rk}\, X \leq \mathrm{rk}\, Y$

Д-во:

$X \supseteq \underset{\text{базис}}{B}$; $\underset{\text{базис}}{Б} \subseteq Y$; $\underset{\text{л.н.}}{B} \subseteq \langle Y\rangle = \langle Б\rangle \overset{\text{по ОЛ о ЛЗ}}{\Rightarrow} \underset{\mathrm{rk}\, X}{|B|} \leq \underset{\mathrm{rk}\, Y}{|Б|}$

Утв

$\underset{\text{матрица}}{A} = (A_1 \ldots \underset{\text{столбцы}}{A_n})$, $A_i \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathrm{rk}\{A_1, \ldots, A_n\}$ не меняется при элемент. преобразованиях

а) строк

б) столбцов

Д-во:

а) $(A_1 \ldots A_n) \overset{\text{эл.п. строк}}{\rightsquigarrow} (A_1' \ldots A_n')$

$\sum \lambda_i A_i = \theta \Leftrightarrow \sum \lambda_i A_i' = \theta$

$\left(A \middle| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) \longrightarrow$ из-за неизм. решений при эл. преобраз.

б) $\mathrm{rk}\{A_1, \ldots, A_n\} \overset{?}{=} \mathrm{rk}(\underset{= A_1'}{A_1 + \lambda A_2}, \underset{= A_2'}{A_2}, \ldots)$

$A_i' \subseteq \langle A_1, \ldots, A_n\rangle$

$\mathrm{rk}\{A_1', \ldots\} \leq \mathrm{rk}\{A_1, \ldots\}$

ЭП. обратимы

$\Rightarrow \mathrm{rk}\{A_1, \ldots\} \leq \mathrm{rk}\{A_1', \ldots\}$

$\Rightarrow \mathrm{rk}\{A_1, \ldots\} = \mathrm{rk}\{A_1', \ldots\}$

Теорема о ранге матрицы (первая часть)

$\forall$ матрицы $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $[= M_{1\times m}(\mathbb{R}^n)]$

ранг мн-ва строк = ранг мн-ва столбцов

$A \xrightarrow[\text{и столбцов}]{\text{Э.П. строк}}$ $\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots \\ & & & 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$ → ед-но (ранг = кол. во ненулевых)

Э.П. строк

$\begin{pmatrix} 1 * 0 0 \\ 1 * \\ 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{Э.П. столбцов}}$

rk A (ранг матрицы) $\overset{\text{ОПР}}{=}$ ранг мн-ва строк/столбцов

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности в терминах рангов)

СЛУ совместна ⟺ ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы

Д-во: $\tilde{A} = (A \mid B)$ $\quad rk\tilde{A} = rkA$

Э.П. строк (ничего не меняется)

$\tilde{A}$ совместна, если нет ступеньки ⇒ $rk\tilde{A} = rkA$

несовместна, если есть ступенька ⇒ $rk\tilde{A} > rkA$ (≠)

⇒ ⊠

Критерий определенности СЛУ (1 решение)

СЛУ определена ⟺ (ранг. матр. коэф) = (ранг расшир матр) = = числу переменных

$n\underset{m}{(A|0)}$ – однородная система $\quad$ U – мн-во решений в $\mathbb{R}^m$, непустое (все нули)

Утв. U – векторное пр-во (подпр-во $\mathbb{R}^m$)

Упр. V – в.п. $\supseteq \hat{U}$ Тогда $\hat{U}$ – подпр. во ⟺ 1) $\forall u_1, u_2 \in \hat{U}$ $u_1 + u_2 \in \hat{U}$

2) $\theta \in \hat{U}$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall u \in \hat{U}$ $\lambda u \in \hat{U}$

$0 = a \cdot (x + x') + \ldots + \overset{1)}{\Leftarrow}$ $ax + by + \ldots = 0$ 2) оч-но

$ax' + by' + \ldots = 0$ 3) подобно

Упр* ∀ под-пр-во в $\mathbb{R}^m$ задается некоторой СЛ однород. У

Теорема Мн-во решений СЛ однород. У $((A|0))$ является подпр-вом в $\mathbb{R}^m$ размерности $m - rkA$

Д-во: $x_1, \ldots, x_k$ → главные; $x_{k+1}, \ldots, x_m$ → свободные

Алгебра лекция 23.09.2022

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots \end{cases}$$

I Мн-во решений ОСЛУ является подпр-вом в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \mathrm{rk}A$, где n - неизв, A - матрица коэф

$x_1, \dots, x_k$ - главные, $x_{k+1}, \dots, x_n$ - свободные

$v_1, v_2, \dots, v_{n-k}$ — л.н., решения → все 0

все реш-ния восполняют?

$W = \begin{pmatrix} * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \sum \alpha_i v_i = \begin{pmatrix} * \\ \alpha_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

ФСР ОСЛУ - базис $\quad \left(\{x+y+z+t=0 \Rightarrow \dim U = 3 = 4-1 \right.$

$x = -y-z-t \qquad \mathrm{rk} = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ x при y, z, w таких

$U \xrightarrow{A} V$ - линейное отображение A

в.п.! $\quad \begin{cases} A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2) \\ A(\alpha \cdot u_1) = \alpha \cdot A(u_1) \\ \forall u_1, u_2 \in U \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$ (гомоморфизм векторных пр-в)

$U = \mathbb{R}^3 = V$

$A(v) = 2v$

• $A: U \to V$ → линейное наз-ся изоморфизмом, если оно взаимно однозначно

• $U \simeq V$ U изоморфно V, если $\exists$ изоморфизм $U \to V$

• $\mathbb{R}^3 \overset{?}{\underset{A}{\not\simeq}} \mathbb{R}^4$ → л.н. $e_1, e_2, e_3, e_4 \Rightarrow Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ л.з.

$\Rightarrow \sum \lambda_i Ae_i = \theta \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow \sum \lambda_i e_i = \theta \Rightarrow \boxed{\Xi}$

Теорема U и V - в.п. над $\mathbb{R}$ (конечномерные)

$U \simeq V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$

„$\Leftarrow$" выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в U, $f_1, f_2, \dots, f_n$ в V

$u \in U = \sum \lambda_i e_i \Rightarrow A(u) = A(\sum \lambda_i e_i) \overset{\text{опр}}{=} \sum \lambda_i f_i$ → биекция, л-на

„$\Rightarrow$" $\mathcal{A}: U \to V$ изоморфизм $\Gamma\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис U

$\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n \to$ если л.з. $\sum \mathcal{A}e_i \cdot \lambda_i = \theta$

$\left(\mathcal{A}(\overline{0}_u) \overset{?}{=} \overline{0}_v\right.$

$\mathcal{A}(0 \cdot \overline{0}_u) = 0 \cdot \mathcal{A}(\overline{0}) = \overline{0}$

$\mathcal{A}\sum e_i \lambda_i = \theta$

$\sum e_i \lambda_i = \theta \Rightarrow$ против.

$\dim U = n \leq \dim V \Leftarrow$ образы л.н.

ан-но

$\dim U \geq \dim V \Rightarrow \dim U = \dim V$

<u>Следствие</u> $\forall$ конечномерное в.п. над $\mathbb{R}$ изоморфно $\mathbb{R}^n$, где n - размерность в.п.

$U \to V$ всегда (если что всё в 0)

<u>УПР.</u> $U \xrightarrow[\text{лин.}]{\text{инъект.}} V \Leftrightarrow \dim U \leq \dim V$

$U \xrightarrow{\text{сюръект}} V \Leftrightarrow \dim U \geq \dim V$

$U \xrightarrow{\mathcal{A}} V$ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - базис в U $\mathcal{A}(u) = \sum \alpha_i \mathcal{A}(e_i)$

$\{f_1, \dots, f_m\}$ - базис в V $\sum \alpha_i e_i$

пусть $\mathcal{A}(e_i) = v_i \in V$ (какие угодно)

$\Rightarrow \mathcal{A}(\sum \alpha_i e_i) \overset{\text{опр}}{=} \sum \alpha_i v_i$

$\mathcal{A}(e_i) = v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица лин. отображения $\mathcal{A}$

Алгебра лекция 26.09.2022

$U \xrightarrow{\mathcal{B}} V \xrightarrow{\mathcal{A}} W \quad \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \quad (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(u))$

$\{e_1, \dots\}$ - базис в U

$\{f_1, \dots\}$ - базис в V

$\{g_1, \dots\}$ - базис в W

$\mathcal{C}(e_i) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(e_i) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(e_i)) =$

$= \left[\mathcal{B}(e_i) = \sum_k b_{ki} f_k \right.$ (определение матрицы $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ оператора $\mathcal{B}$) $\Big] =$

$= \mathcal{A}\left(\sum_k b_{ki} f_k\right) = \sum_k b_{ki} \mathcal{A}(f_k) = \left[\mathcal{A}(f_k) = \sum_j a_{jk} g_j \right] =$

$= \sum_j \left(\sum_k a_{jk} b_{ki}\right) g_j = \sum_j c_{ji} g_j \Rightarrow c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} \quad \forall j, i$

Т. Пусть $U \xrightarrow{\mathcal{B}} V \xrightarrow{\mathcal{A}} W$ - лин. отображ., $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

U — n мерное, V — m мерное, W — l мерное; $U \xrightarrow{\mathcal{C}} W$

A, B и C - матрицы отображений

$\Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ для $\forall i = 1, \dots, l$; $\forall j = 1, \dots, n$

$\Downarrow$

$\Big[$ $A - l \times m$, $B - m \times n \Rightarrow AB \overset{\text{опр}}{=} C - l \times n \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

опр. умнож. матриц $\Big]$

(1) $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$

(2) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ (3) $(AB)C = A(BC)$

Д-во 3)

$X = (\underbrace{AB}_{Z})C \quad x_{ij} = \sum_k z_{ik} c_{kj} = \sum_k \left(\sum_l a_{il} b_{lk}\right) c_{kj} = \sum_k \sum_l a_{il} b_{lk} c_{kj}$

$Y = A(\underbrace{BC}_{T}) \quad y_{ij} = \sum_\alpha a_{i\alpha} t_{\alpha j} = \sum_\alpha \left(\sum_\beta b_{i\beta} c_{\beta\alpha}\right) a_{i\alpha} = \sum_\alpha \sum_\beta b_{i\beta} c_{\beta\alpha} a_{i\alpha}$

(4) $\exists E \quad \forall A, B \quad AE = A$ и $EB = B \quad E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

($AB \neq BA$ почти всегда, $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ или $B = 0$)

T. $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k\times m}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \operatorname{rk}(AB) \le \min(\operatorname{rk}A, \operatorname{rk}B)$

$AB = C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ $\quad C_1 = \sum a_{1j} B_j$

$\Downarrow$

$\langle B_1, \dots, B_k \rangle$ – ~~столбцы~~ строки

строки матрицы $C = AB$ выр-ся л/з строк B

$\Downarrow$ по О.Л. о Л.З.

$\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk}(B)$

столбцы C л/з столбцы $A \Rightarrow \operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk}(A)$

Алгебра лекция 30.09.2022

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$AX = B$

T. – связь решений СЛУ и соотв. ОСЛУ

$AX = B$ – СЛУ $\quad U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = B\}$ – мн-во решений

$AX = 0$ – ОСЛУ $\quad W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid Aw = 0\}$ – мн. решений

Тогда $\forall u_0 \in U \quad U = u_0 + W \overset{\text{опр.}}{=} \{u_0 + w \mid w \in W\}$ если U непусто

Д-во. по двойному включению

$\supseteq$ Дано: $u = u_0 + w \quad Aw = 0$

Хотим: $Au = B$

$A(u_0 + w) = Au_0 + Aw = B + 0 = B \Rightarrow \blacksquare$

$\subseteq$ Дано: $Au = B \quad Au_0 = B$

Хотим: $\exists w$: 1) $Aw = 0$ 2) $u = u_0 + w$

$w = u - u_0 \quad$ 2) выполнено

1) $Aw = A(u - u_0) = Au - Au_0 = B - B = 0$

$$i\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \to$$ i-ая строка/столбец на λ
$\downarrow$
нуле

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \to$$ i-ая $\Leftrightarrow$ j-ая строка/столбец

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \to$$ i-ая $+ \lambda j$-ая строка/столбец

МАТРИЦЫ элементарных преобразований

ФАКТ: S - матрица эл. преобр $n \times n$, тогда $\forall A$ $n \times k$
$S \cdot A$ из A элементарные преобраз. строк
$\forall B = k \times n$
BS из B преобраз. столбцов

$A - n \times n$
невырожденная, т.е. $\operatorname{rk} A = n$
$A \xrightarrow{\text{э.п. строк}} E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{S_n \cdots S_2 S_1}_{B} A = E$

Пусть $A - n \times n$
Тогда A^{-1} (обратная матрица) это такая $B^{n\times n}$, что $\begin{cases} BA = E \\ AB = E \end{cases}$

Утв. $\forall$ невырожд. матрицы A $\exists$ левая обратная ($BA = E$) доказали

$BA = E$
$AC = E$
$\underbrace{B\overbrace{AC}^{E}}_{E} = C = B$

T. $A \in M_n(\mathbb{R})$ Тогда A невырождена $\Leftrightarrow$ A^{-1} существует ~~невырождена~~

T. A^{-1} единственна (если $\exists$)

Алгоритм поиска A^{-1}

ФАКТ

$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$

$XY(\cancel{Y}^{-1}X^{-1}) = E$

$(A|E) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл.}} (E|A^{-1})$

$S_k \ldots S_1 A = E \quad S_k \ldots S_1 E = A^{-1}$

$SAP = E \quad SEP = A^{-1}$

$A = S^{-1}P^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PS$

$A^T = B$ транспонирование $b_{ij} = a_{ji}$

ФАКТ:

$\underbrace{(AB)^T}_{ij} = B^T A^T \qquad ((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$

$(B^T A^T) = \sum_k b_{ki} a_{jk}$

Алгебра лекция 07.10.2022

$rk(AB) \overset{①}{\le} \min(rkA, rkB)$

при этом $rk(AB) = \begin{cases} rkA, \text{ если } B \text{ невыр. (квадратная)} \\ rkB, \text{ если } A \text{ невыр. (квадратная)} \end{cases}$

1) $rk(AB) \overset{①}{\le} rkA$

$A = (AB)B^{-1} \Rightarrow rkA \le rk(AB)$ $\Big| \Rightarrow rkA = rkAB$

Упр A и B 7×7 $rkA = rkB = 5$ $rk(AB) = ?$

~~Перестановка~~ степени n – это биекция $\sigma : \{1,..,n\} \to \{1,..,n\}$
(подстановка)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$S_n = \{$все перестановки степени $n\}$
симметрическая группа $|S_n| = n!$ $\quad \delta \in S_n \ni \sigma$

$$S_n \times S_n \xrightarrow{\text{"}\circ\text{"}} S_n \qquad \sigma\delta(x) \overset{\text{опр}}{=} \sigma(\delta(x))$$

1) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
2) $\exists e \in S_n\ \forall \sigma \in S_n\ e\sigma = \sigma e = \sigma$
3) $\forall \sigma \in S_n\ \exists \delta : \sigma\delta = \delta\sigma = e\ (\delta = \sigma^{-1})$

группа

~~Опр~~ Транспозиция – перестановка, кая меняет местами i и j, а остальные оставляет

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \overset{\text{опр}}{=} (i\ j)$$

УПР
$k \le n-1$

БАЗА:
$(12)\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

7. $\forall \sigma \in S_n\ \exists \tau_1, .., \tau_k$ – транспозиции, $\sigma = \tau_1\tau_2\dots\tau_k$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \dots & \dots & l \end{pmatrix}$ $\quad (ln)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \dots & \dots & n \end{pmatrix} \Rightarrow$ далее по индукции

$\delta\begin{pmatrix} a & b & \dots \\ x & y & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \dots \\ \delta(x) & \delta(y) & \dots \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & b & \dots \\ x & y & \dots \end{pmatrix}\delta = \begin{pmatrix} \delta(a) & \delta(b) & \dots \\ x & y & \dots \end{pmatrix}$

$(ln)\sigma = \sigma^{k-1} = \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{T}_{k-1}$

?

$\mathcal{T}_k^{-1}(ln)\sigma = \mathcal{T}_k^{-1}(\mathcal{T}_1 \dots \mathcal{T}_{k-1}) \Rightarrow \sigma = (ln)^{-1}\mathcal{T}_1\dots\mathcal{T}_{k-1}$

Чётность перестановки $\sigma \in S_n$ — чётность числа беспорядков (инверсий) в строке $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$

Инверсия — пара i, j $i<j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$\underbrace{\operatorname{sgn}}_{\text{знак}} \sigma = (-1)^{\text{чётность}}$$

ФАКТ $\operatorname{sgn}((ij)\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \dots & i \dots j & \dots \end{pmatrix}$ $(ij)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \dots & j \dots i & \dots \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x & i \\ & \text{или } j \end{pmatrix}$ инверсии?

I x левее всех II x м/у III x правее всех IV пара $i\ j$

$\Rightarrow$ транспозиция всегда нечётна

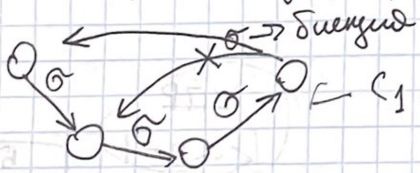
Т. $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$

Утв. $A_n = \{$чётные перестановки$\}$ $|A_n| = \frac{n!}{2}$ при $n \geq 2$

Цикл $(i_1, \dots, i_k)$ — перестановка $\begin{pmatrix} 1 \dots & i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots \\ 1 \dots & i_2 & i_3 & \dots & i_1 & \dots \end{pmatrix}$

Т. $\forall \sigma \in S_n \ \exists \underbrace{c_1, \dots, c_k}_{\text{независимые циклы}}$

[$(i_1, \dots, i_k)$ и $(j_1, \dots, j_n)$ независимы, если $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_k\} = \varnothing$



← c_1 ⇒ и т.д.

Алгебра лекция 10.10.2022

$\tau_1 \ldots \tau_k$

$\sigma \in S_n \ni \delta$

$sgn(\sigma\delta) = (sgn(\sigma)) \cdot (sgn(\delta))$

$sgn(\tau\sigma) = -sgn(\sigma) \Rightarrow sgn\,\sigma = (-1)^k$

$sgn(\tau_1 \ldots \tau_k \delta) = (-1)^k sgn\,\delta$

$(i_1 \ldots i_k) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k & j & \alpha \to \\ i_2 & i_3 & \ldots & i_1 & j & \alpha \to \end{pmatrix} \quad sgn(i_1 \ldots i_k) - ? = (-1)^{k+1}$

$= (i_1 i_2)(i_2 i_k) \ldots (i_{k-1} i_k)$

$|A| = \det(A)$ — определитель, детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \cdot sgn\,\sigma$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underset{e}{\boxed{a_{11}a_{22}}} \cdot sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \underset{(12)}{\boxed{a_{12}a_{21}}}\, sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

① Полилинейность по столбцам

$A = (A_1 \ldots A_n)$

а) $|A_1 \ldots A_i \ldots A_n| = |A_1 \ldots A_i' \ldots A_n| + |A_1 \ldots A_i'' \ldots A_n|$, $A_i = A_i' + A_i''$

б) $|A_1 \ldots \lambda A_i \ldots A_n| = \lambda |A_1 \ldots A_i \ldots A_n|$

② Кососимметричность (по столбцам)

$|A_1 \ldots \underset{i}{A_i} \ldots \underset{j}{A_j} \ldots A_n| = -|A_1 \ldots \underset{i}{A_j} \ldots \underset{j}{A_i} \ldots A_n|$

пусть $\tau\sigma = \delta \Leftrightarrow \sigma = \tau\delta \quad (\tau^{-1} = \tau) \quad (\tau^{-1}\tau\sigma = \tau^{-1}\delta = \tau\delta)$

$|\,| = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\tau\delta)\, a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \ldots a_{n\delta(n)} = -\sum_{\delta \in S_n} sgn\,\delta\, a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \ldots a_{n\delta(n)}$

③ $|E| = 1$

Упр 1) $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ Полилинейна и кососимм. по столбцам и $f(E) = 1 \Rightarrow \forall A\ f(A) = |A|$

ФАКТ $|A^T| = |A|$

$$|A|^T = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_i a^T_{i\sigma(i)} = \sum_{\delta\in S_n} \operatorname{sgn}\delta \prod_{j=1}^{n} a_{j\delta(j)}$$

$$a^T_{i\sigma(i)} = a_{\sigma(i)i}, \quad \prod_i a_{\sigma(i)i} = \prod_{j=1} a_{j\sigma^{-1}(j)}, \text{ где } j=\sigma(i)$$

$$\sigma^{-1} = \delta$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{vmatrix} = x_1 \ldots x_n$$

$\Rightarrow$ I $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2+\lambda A_2' \\ A_3 \\ \vdots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2' \\ A_3 \\ \vdots \end{vmatrix}$ II. $\begin{vmatrix} A_1 \\ \lambda A_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda|A|$ III. $\begin{vmatrix} A_j \\ A_i \end{vmatrix}^{i}_{j} = -|A|$

<u>Факт</u> если в матрице две строки (столбца) одинаковы, то $|A|=0$

Алгебра лекция 14.10.2022

Алгоритм вычисления определителя

$$|A| = \lambda |A'| = \ldots = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s \begin{vmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \ldots \lambda_s \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

э.п. строк и столбцов

Теорема $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ $|AB| = |A| \cdot |B|$

$A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{э.п.}} A'$ $\quad AB \xrightarrow[\text{э.п. строк}]{\text{те же}} A'B$

э.п. строк → э.п. умножение слева на матрицу эл. преобраз. $(A' = SA)$

$\Uparrow A'B = S(AB)$

Случай I: A невырождено $\Rightarrow A' = E$

$$|AB| = |S^{-1} \cdot \underbrace{A'}_{E} B| = |S^{-1} B| = \mu_1 \ldots \mu_s |B| = |A| \cdot |B|$$

$\mu_1 \ldots \mu_s$ → коэф. при элем. преобраз.

$S^{-1} \cdot E = A$

$\Downarrow$

$|S^{-1} \cdot E| = \mu_1 \ldots \mu_s \cdot |E| = \mu_1 \ldots \mu_s$

Случай II: A вырождено $\quad A' = \begin{pmatrix} * \\ 0000 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{|A'| = 0 = |A|}$

$\Rightarrow A'B = \begin{pmatrix} * \\ 0000 \end{pmatrix} \Rightarrow |A'B| = 0$ (по посл. строке)

$|AB| = |S A'B| = 0$

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_s \ldots P_1 A = E \quad P_i$ — матрицы э.п.

$\Downarrow$ $\quad\quad \Downarrow$

$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = P_1^{-1} \ldots P_s^{-1}$

$|AB| = |P_1^{-1} \ldots P_s^{-1} B| =$ ⇒ $|AB| = |A||B|$ достаточно доказать для элем. A

$= |P_1^{-1}||P_2^{-1} \ldots P_s^{-1} B| =$

$= |P_1^{-1}||P_2^{-1}| \ldots |P_s^{-1}||B|$

Утв $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда A разл. в произв. элементарных

$\Leftrightarrow A$ невырожд ($\mathrm{rk}A^{\text{с}}_{\text{т}} = n$)

$\Leftrightarrow$ строки л.н. $\Leftrightarrow$ столбцы л.н. $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ сущ.

$A \underset{\text{строк}}{\overset{\text{э.п.}}{\rightsquigarrow}} A' = \begin{cases} E \\ (\ast) \end{cases}$ ... $\Leftrightarrow |A'| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$

Критерий равенства определителя нулю

$|A| = 0 \Leftrightarrow$ строки (столбцы) л.з.

<u>Теорема об опр. с углом нулей</u>

$$\det \begin{array}{c} \\ k \\ l \end{array} \begin{pmatrix} \overset{k}{A} & \overset{l}{B} \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C) = \begin{vmatrix} A & 0 \\ D & C \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{отдельно верхних, отдельно нижних}]{\text{э.п. строк}} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$ [A' и C' – улучш. ступ. вид]

$\Downarrow$ верхнетреугольная

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |C'|, \quad |C'| = M|C|, \quad |A'| = \Delta |A|$$

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{vmatrix} = \Delta M \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A'| \cdot |C'| = \Delta M |A||C|$$

<u>Лемма</u>

$$i \begin{vmatrix} A & \ast & B \\ 0 \ldots 0 & a_{ij} & 0 \ldots 0 \\ C & \ast & D \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 \ldots 0 \\ \ast & A \quad B \\ \vdots & C \quad D \\ \ast & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

j

<u>Теорема</u> о разложении определителя по строке (или столбцу)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} b_1 + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} b_n,$$ где

b_i – опр. матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца

$\boxed{\text{Семинар (д/з) 7.7, 7.8}}$