3.183. ✓ $a_1=1,\ a_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)a_n$.

3.184. $a_1=1,\ a_2=\dfrac{3}{2},\ (n+2)a_{n+2}-a_{n+1}-(n+1)a_n=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

3.185. $a_1=\dfrac{2}{3},\ a_2=\dfrac{1}{3},\ (n+3)!(a_{n+2}-a_n)+n^2+5n+5=0$.

3.186. $a_1=1,\ a_2=\dfrac{1}{2},\ a_{n+2}=-\dfrac{a_{n+1}}{n+2}+\dfrac{n}{n+1}a_n$.

3.187*. $a_1=1,\ a_2=2,\ 2^{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3n+4$.

3.188. $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{n+1}a_n-\dfrac{n}{n+1}a_{n-1}$.

3.189*. $a_1=a,\ a_2=b,\ a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ при $n\geqslant 3$.

3.190. Пусть $a_1=a,\ b_1=b$, где $a,b\in(0;1)$, и $a_{n+1}=a(1-a_n-b_n)+a_n$, $b_{n+1}=b(1-a_n-b_n)+b_n$ при $n\in\mathbb{N}$. Найти формулы общего члена последовательностей (a_n) и (b_n) и вычислить их пределы.

3.191. Пусть $|b|<1$, $a_n\to a\in\mathbb{R}$ и $x_{n+1}=a_n+bx_n$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что последовательность (x_n) сходится, и найти её предел.

3.192. Пусть $a>0$, $a_1>0$ и $a_{n+1}=a_n(2-a\cdot a_n)$ при $n\in\mathbb{N}$. Исследовать на сходимость последовательность (a_n), и в случае сходимости найти её предел.

3.193°. Доказать, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.

С помощью теоремы Вейерштрасса доказать равенства (3.194—3.199).

3.194. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\ |q|<1$.

◇ **3.195.** $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0,\ |q|<1$.

✓ **3.196.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,\ a>0$.

3.197. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

◇ **3.198.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$.

3.199. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Доказать, что данная последовательность (a_n) сходится, и найти её предел (3.200—3.226).

✓ **3.200.** $a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$.

3.201. $a_1=\sqrt[k]{7},\ a_{n+1}=\sqrt[k]{7a_n},\ k\geqslant 2$.

✓ **3.202.** $a_1=1,\ a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$.

✓ **3.203.** $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{4}{3}a_n-a_n^2$.

3.204. $a_1=\dfrac{3}{2},\ a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}$.

◇ **3.205.** $a_1=\sqrt{2};\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

3.206. $a_1=0,\ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$.

✓ **3.207.** $a_1=0,\ a_{n+1}=\sqrt{a+a_n},\ a\geqslant 0$.

◇ **3.208.** $a_1=a>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$.

✓ **3.209.** $a_1=a>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{a}{a_n^2}\right)$.

3.210*. $a_1=a>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{p}\left((p-1)a_n+\dfrac{a}{a_n^{p-1}}\right),\ p\in\mathbb{N}$.

3.211. $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n+2}{a_n+3}$.

3.212. $a_1=a>0,\ a_{n+1}=6\dfrac{a_n+1}{a_n+7}$.

◇ **3.213.** $a_1=0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{4(1-a_n)}$.

3.214. $a_1=0,\ a_2=\dfrac{1}{2},\ a_{n+2}=\dfrac{1}{3}(1+a_{n+1}+a_n^3)$.

3.215*. $a_1=a>0,\ a_{n+1}=a_n\dfrac{a_n^2+3a}{3a_n^2+a}$.

3.216. $a_1=a,\ a_{n+1}=a_n^2+(1-2b)a_n+b^2,\ b-1\leqslant a\leqslant b$.

3.217. $a_1=c,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+ab}{a+b},\ 0<c<b,\ 0<a<b$.

3.218. $a_1=\frac{b}{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{\frac{ab^2+a_n^2}{a+1}}$, $a>0$, $b>0$.

3.219. $a_1=2$, $a_{n+1}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{a_n}}$. ✓**3.220*.** $a_1=3$, $a_{n+1}=3+\frac{1}{a_n}$.

3.221*. $a_1=a>0$, $a_{n+1}=\frac{a}{2+a_n}$. **3.222.** $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$.

◇**3.223.** $a_1=9$, $a_2=6$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$.

✓**3.224.** $a_1=a$, $a_{n+1}=\sin a_n$. **3.225.** $a_1=a$, $a_{n+1}=\operatorname{arctg} a_n$.

3.226*. $a_1=a$, $a_{n+1}=|a_n-2^{1-n}|$.

3.227*. Найти все значения $a\geqslant -3$, при которых сходится последовательность (a_n), $a_1=\frac{a}{2}$, $a_{n+1}=\frac{a+a_n^2}{2}$, и при этих значениях a найти предел последовательности (a_n).

3.228*. Последовательность (a_n) такова, что $0<a_n<1$ и $a_n(1-a_{n+1})\geqslant\frac{1}{4}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти её предел.

3.229. Пусть $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_n}}$. Доказать, что последовательность $(\sqrt{a_n})$ сходится к положительному корню уравнения $x^4-x-2=0$.

3.230*. Пусть $p\in\mathbb{N}$, $p>1$ и $a_n=\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\ldots+\sqrt[p]{1}}}$ (n корней). Доказать, что последовательность (a_n) сходится к положительному корню уравнения $x^p-x-1=0$.

3.231. Пусть $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}\geqslant 0$ при $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что $a_n\to+\infty$ при $n\to\infty$.

3.232. Пусть последовательность (a_n) ограничена и $a_{n+1}\geqslant a_n-\frac{c}{2^n}$, $c>0$. Доказать, что последовательность (a_n) сходится.

3.233. Пусть последовательность (a_n) ограничена, последовательность (b_n) сходится и $a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\geqslant b_{n+2}-\frac{3}{2}b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что последовательность (a_n) сходится.

3.234*. Обязательно ли последовательность (a_n) сходится, если она ограничена и $\forall n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство: а) $a_{n+1}\geqslant a_n-\frac{1}{n^2}$; б) $a_{n+1}\geqslant a_n-\frac{1}{n}$?

◇**3.235.** Пусть $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Доказать, что последовательности (a_n) и (b_n) имеют общий предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$, причём $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ для всякого $n\in\mathbb{N}$ и $2<e<3$.

✓**3.236.** Доказать неравенство $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!\leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

3.237. Доказать, что $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$ при $n\to\infty$.

3.238. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_{nk}^n}$, $k\geqslant 2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^k}{n^{kn}}}$.

✓**3.239.** Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$; б) $\frac{1}{4n}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{4}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

✓**3.240.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

✓**3.241.** Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$;

3.377. Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, и существуют две подпоследовательности (b_{n_k}) и (b_{m_k}) последовательности (b_n), такие что $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} b_{m_k} = c$. Доказать, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Найти нижний и верхний пределы последовательности (a_n) (3.378—3.391).

3.378°. $a_n = (-1)^{n-1}$.

◇ **3.379°.** $a_n = n^{(-1)^{n+1}}$.

3.380°. $a_n = 3^{(-1)^n}$.

3.381°. $a_n = ((-1)^n + 1)\cdot 2^n$.

✓**3.382°.** $a_n = \dfrac{n+1}{n+1+n\cdot(-1)^n}$.

3.383. $a_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[n]{n}}$.

✓**3.384.** $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

3.385. $a_n = (-1)^n \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^p}$.

✓**3.386.** $a_n = \cos\dfrac{2\pi n}{3}$.

3.387. $a_n = \sin^2\dfrac{\pi n}{8}$.

3.388. $a_n = \left(1 + \sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\left(1 - \sin\dfrac{\pi n}{6}\right)$.

◇ **3.389.** $a_n = \left(2 + \cos\dfrac{\pi n}{3}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi n}{6}\right)$.

3.390*. $a_n = \{\sqrt{n}\}$.

3.391*. $a_n = \{n^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$.

✓**3.392.** Верно ли, что ограниченная сверху последовательность имеет конечный верхний предел, а ограниченная снизу — конечный нижний предел?

✓**3.393.** Доказать, что последовательность (a_n), не имеющая ни одного частичного предела в $\mathbb{R}$, является бесконечно большой.

3.394. Доказать, что $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

3.395. Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

✓**3.396.** Доказать, что для любой последовательности (a_n) справедливы неравенства $\inf a_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup a_n$. Привести примеры последовательностей, для которых:

а) $\inf a_n < \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$; б) $\inf a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$; в) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n < \sup a_n$; г) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$.

3.397. Доказать, что если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n < \sup a_n$, то существует такое n_0, что $a_{n_0} = \sup a_n$.

3.398. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает либо своей точной нижней грани, либо своей точной верхней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей каждого из этих типов.

✓**3.399.** Доказать, что:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n} a_k = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sup\limits_{k\geqslant n} a_k$; б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant n} a_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\inf\limits_{k\geqslant n} a_k$.

3.400. Пусть последовательности (a_n) и (b_n) таковы, что $a_n \leqslant b_n$.

а) Доказать, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

б) Можно ли утверждать, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$?

3.401. Доказать, что если все члены последовательности (s_n) положительны, то справедлива цепочка неравенств

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{s_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{s_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n}.$$

довательности, для которой оно является [illegible] частичных пределов, либо доказать, что такой последовательности не существует:

✓а) $\varnothing$; б) $\{1\}$; в) $\{\pi\}\cup\{e\}$; ✓г) $\mathbb{N}$; ✓д) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; е) $\mathbb{Z}$; ж) $\mathbb{Q}$; з) $[0;\,1]$;

и) $[0;\,1)$; к) $(0;\,1)$; ✓л) $[0;\,1]\cap\mathbb{Q}$; м) $[0;\,1]\cup\{2\}$; н) $[0;\,2]\setminus\{1\}$;

✓о) $[0;\,+\infty)$; п) $\mathbb{R}$; р) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3.425. Доказать, что равенство $\overline{a}=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\overline{a}\in\mathbb{R}$, равносильно выполнению двух условий:

а) $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N$ имеем $a_n<\overline{a}+\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\,\forall M\in\mathbb{N}\,\exists m>M\colon a_m>\overline{a}-\varepsilon$.

3.426. Доказать, что равенство $\underline{a}=\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\underline{a}\in\mathbb{R}$, равносильно выполнению двух условий:

а) $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N$ имеем $a_n>\underline{a}-\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\,\forall M\in\mathbb{N}\,\exists m>M\colon a_m<\underline{a}+\varepsilon$.

3.427. Доказать, что для ограниченных последовательностей справедливы неравенства:

◇а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

✓в) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ $(a_n\geqslant0,\ b_n\geqslant0)$;

г) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ $(a_n\geqslant0,\ b_n\geqslant0)$.

✓**3.428.** Привести примеры последовательностей, для которых в соотношениях предыдущей задачи имеют место строгие неравенства.

3.429. Доказать, что если последовательность (a_n) сходится, то для любой последовательности (b_n) имеем

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$; б) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n>0)$.

3.430. Доказать, что если последовательность (a_n) такова, что для любой последовательности (b_n)

или а) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$,

или б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ $(a_n>0)$,

то последовательность (a_n) сходится.

3.200. 2. **3.201.** $\sqrt[k-1]{7}$. **3.202.** $\frac{1}{2}$. **3.203.** $\frac{1}{3}$. **3.204.** 2. **3.205.** 2. **3.206.** 3.
3.207. $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$ при $a>0$; 0 при $a=0$. **3.208.** $\sqrt{a}$. **3.209.** $\sqrt[3]{a}$. **3.210.** $\sqrt[p]{a}$. *Указание.* Воспользоваться неравенством Бернулли. **3.211.** 2.
3.212. 2. **3.213.** $\frac{1}{2}$. **3.214.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3.215. $\sqrt{a}$. *Указание.* Доказать по индукции, что при $0<a<1$ последовательность возрастает, причём $a_n<\sqrt{a}$, а при $a>1$ — убывает, причём $a_n>\sqrt{a}$; использовать равенство $a_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{(a_n-\sqrt{a})^3}{3a_n^2+a^2}$.
3.216. b. **3.217.** a. **3.218.** b.
3.219. $1+\frac{\sqrt{15}}{3}$. *Указание.* Доказать, что (a_n) возрастает и $0<a_n<\frac{7}{3}$.
3.220. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. *Указание.* Доказать, что последовательности (a_{2n}) и (a_{2n+1}) монотонны и сходятся к общему пределу.
3.221. $\sqrt{1+a}-1$. *Указание.* См. указание к предыдущей задаче.
3.222. 4. **3.223.** 4. **3.224.** 0. **3.225.** 0.
3.226. $-a$ при $a\leqslant 0$, 0 при $0<a<2$, $a-2$ при $a\geqslant 2$. *Указание.* Показать, что $a_{n+1}=$ $=a_n-\frac{1}{2^{n-1}}$ при $a\leqslant 0$ или $a\geqslant 2$, $0\leqslant a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ при $0<a<2$.
3.227. $1-\sqrt{1-a}$ при $-3\leqslant a\leqslant 1$. *Указание.* При $a\in[-3;0)$ рассмотреть подпоследовательности (a_{2n}) и (a_{2n+1}) .
3.228. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Показать, что $\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{a_n(1-a_{n+1})}\leqslant\frac{1}{2}(1-a_{n+1}+a_n)$.
3.232. *Указание.* Доказать, что последовательность (b_n), $b_n=a_n-\frac{c}{2^{n-1}}$, монотонна и ограничена.
3.233. *Указание.* Для $c_n=a_n-b_n$ показать, что $c_{n+2}-c_{n+1}\geqslant\frac{c_{n+1}-c_n}{2}\geqslant\ldots\geqslant\frac{c_2-c_1}{2^n}$, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.
3.234. а) Да. *Указание.* Рассмотреть последовательность $b_n=a_n-\frac{1}{n-1}$, $n\geqslant 2$. б) Нет, например, $a_n=H_n=1+1/2+\ldots+1/n$ (см. задачу 2.48).
3.236. *Указание.* Применить метод математической индукции.
3.238. а) $\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$; б) e^{-k}.
3.239. *Указание.* а) Воспользоваться задачей 3.235; б) использовать неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<e$ (см. задачу 3.235) и применить неравенство Бернулли для оценки разности $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\left(1+\frac{1}{4n(n+1)}\right)^n-1\right)$.
3.241. а) *Указание.* Пользуясь биномом Ньютона, доказать неравенства

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

где $1\leqslant k\leqslant n$, и перейти к пределу при $n\to\infty$ при фиксированном k.
б) *Указание.* Доказать, что $e-\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right)$, и применить формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
в) *Указание.* Предположив противное, т. е. что $e=\frac{m}{n}$ при $m,n\in\mathbb{N}$, применить равенство из предыдущего пункта и получить противоречие.
г) *Указание.* Применить равенство из пункта б) и неравенство $\sin x<x$ при $x>0$.
3.242. *Указание.* Воспользоваться п. а) предыдущей задачи.

3.377. *Указание.* Показать, что если у последовательности существуют другие частичные пределы, отличные от a и c, то они обязательно лежат в интервале $(a; c)$.
3.378. -1; 1. **3.379.** 0; $+\infty$. **3.380.** $\frac{1}{3}$; 3. **3.381.** 0; $+\infty$. **3.382.** $\frac{1}{2}$; $+\infty$.
3.383. -1; 1. **3.384.** $\frac{1}{e}$; e.

3.385. 0; 0 при $p>0$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ при $p=0$; $-\infty$; $+\infty$ при $p<0$.

3.386. -1; $\frac{1}{2}$. **3.387.** 0; 1. **3.388.** 0; $2+\sqrt{3}$. **3.389.** 1; 3.

3.390—3.391. 0; 1. **3.392.** Нет, если последовательность отрицательная или д), ж), и), к), л), н), р) не существует, так как множество не замкнуто.

3.428. Например, для неравенств п. а) и б) $(a_n)=\overline{(1,\,-1,\,0)}$, $(b_n)=\overline{(-2,\,0,\,1)}$; для неравенств п. в) и г) $(a_n)=\overline{\left(\frac{1}{2},\,2,\,\frac{1}{3}\right)}$, $(b_n)=\overline{\left(3,\,\frac{1}{2},\,4\right)}$.

3.430. *Указание.* Если последовательность (a_n) расходится, то для последовательности $b_n=-a_n$, $n\in\mathbb{N}$, не выполнено условие а), а для последовательности $b_n=\frac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$, не выполнено условие б).

3.431. *Указание.* Воспользоваться равенством $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

3.432. См. указание к предыдущей задаче.