03.09.2022 Алг, семинар

Гордиенко Алексей Сергеевич (каф. высш. алгебры)

alexey.gordienko@math.msu.ru

1) д/з — важно 2) коллоквиум 3) к/р → ЗАЧЁТ

halgebra.math.msu.ru

↳ общ. курсы → 1 курс 2 поток Клячин → 115 → д/з

зеркало:

sites.google.com/view/alexey-sergeevich/учебные-материалы

↳ алг, первый сем, 115гр, 22/23

Матрица — прямоуг. таблица с числами

брать задачник с собой!

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a_{ij} i-я строка, j-ый столбец

$m \times n$ (строк × столбцов)

Определитель / Детерминант — для квадр. матриц

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n=1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$n=3$: $$\underset{\text{„}+\text{"}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \underset{\text{„}-\text{"}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Правило Крамера

р-рим систему линейных ур-ний

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$\Delta = \det(a_{ij})$ $1 \le i, j \le n$ — это матрица системы

$$\Delta_j = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & \boxed{b_1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

на j-ом столбце $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$1 \le j \le n$

Если $\Delta \ne 0$, то $\exists$ единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Операции над матрицами

① сложение (одних размеров) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots} \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A + B \overset{\text{по опр}}{:=} C$, где $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots} \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$, где $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$

② умножение на число $\alpha A := B$, где $b_{ij} = \alpha a_{ij}$

Нулевая матрица $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ $A + O = O + A = A$ для $\forall A \in M_{m,n}$ ← мн-во матриц $m \times n$

③ умножение на матрицу $\underset{m \times k}{A = (a_{ij})}$ $\underset{k \times n}{B = (b_{ij})}$ Тогда $A \cdot B = \underset{m \times n}{C}$

- Частный случай, когда

строка → $\underline{a} = (a_1 \dots a_k)$

$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ $\underset{1\times k \; k \times 1}{ab} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k) \to$ число (мат. 1×1)

- общий случай

$$AB = \underset{m \times k}{\begin{pmatrix} \boxed{\quad a_1 \quad} \\ - - - \\ \boxed{\quad a_m \quad} \end{pmatrix}} \underset{k \times n}{\begin{pmatrix} \boxed{b_1} & \dots\dots & \boxed{b_n} \end{pmatrix}} = \underset{m \times n}{C} = (C_{ij})$$

$$C_{ij} = a_i b_j = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

Единичная матрица $E_m = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $E_m \cdot \underset{m \times n}{A} = \underset{m \times n}{A} \cdot E_n = A$

! Д/з: проверить →

④ Возведение в степень $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{n \text{ раз}} \Rightarrow n \in \mathbb{N}$

Д/з 9.1 (а-г), 9.2 (б, в), 8.6 (б, д), 17.1 (б, г), 17.2 (б), 17.4 (а, б)
в отдельной тетради

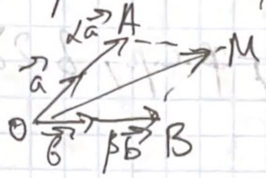
05.09.2022 Алг, семинар

Системы ур-ний

Пространство, пл-сти?

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ \dots \\ A_m x + B_m y + C_m z + D_m = 0 \end{cases}$$

Варианты: ∅, точка, прямая, пл-сть



$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{OA} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

пусть есть столбцы $a_1, \dots, a_n$

Их линейные комбинации: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

Тривиальная если $\forall \lambda_i = 0$

столбцы $a_1, \dots, a_n$ ЛЗ, если ∃ нетрив. лин. комб, равно $\underline{0}$

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

Подмножество (непустое) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ - подпространство, если для

[redacted] $\forall a, b \in W \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha a + \beta b \in W$

⇒ Базис в подпространстве W — $a_1, \dots, a_s$, если

① $\forall b \in W \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R} \to b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$

② $a_1, \dots, a_s$ — $\underset{\text{лин. незав.}}{\text{ЛН}}$ $s = \dim W$ (размерность подпр-ва)

пусть. СЛУ $\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Ax = b$

пусть x_0 — частное решение

$Ax_0 = b \Rightarrow A(x - x_0) = 0$ $x - x_0$ — решение системы $Ay = 0$

<u>Пр</u> множество W решений системы $Ay = 0$ — подпр-во в $\mathbb{R}^n$

$A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A y_1 + \lambda_2 A y_2 =$, $y_1, y_2 \in W$

$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$ т.е. $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in W$ — подпр-во (прост-е решений)

Алгебра, семинар 10.09.2022

01.10.2022 → К/Р

Д/З 17.5(б), $(AB)^T = B^T\cdot A^T$; 17.14–17.17

Матричные единицы

$$e_{ij}\ ;\ E_{ij} := \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ & & j & & \end{pmatrix}_{m\times t}$$

$$\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underset{m\times n}{E_{ij}}$$

$$\underset{n\times m}{A^T} = (a_{ji})$$ (столбцы ⇔ строки)

$$\underset{m\times t}{E_{ij}}\cdot\underset{t\times n}{E_{kl}} = i\begin{pmatrix} O \\ \boxed{0\ldots010\ldots0} \\ \overset{\vdots}{O} \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & \boxed{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{matrix}} & O \\ & l & \end{pmatrix}k =$$

$$= i\begin{pmatrix} O \\ 0\ldots0 * 0\ldots0 \\ O \\ l \end{pmatrix} = \delta_{jk}\underset{m\times n}{E_{il}}$$

$$\delta_{jk} := \left[\begin{array}{l} 0,\ \text{если } j\ne k \\ 1,\ \text{если } j=k \end{array}\right.$$

Алгебра семинар 24.09.2022

I. $\underline{a}_j \mapsto \underline{a}_j + \lambda a_i \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ 0 & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}\cdot A$ (столбец i)

II $a_i \leftrightarrow a_j \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} A$

III $a_i \mapsto \lambda a_i, \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} A$

$\to$ элементар. матрицы

Д/З 3.1вг, 3.2вгде,
3.3бв, 3.4б, 3.5вгде
3.6 вгде, 3.8, 3.9, 3.11
3.14, 3.15, 3.16

$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$

Домножение на невыр. матрицу не меняет ранга, т.к. $\forall$ невырожд. матрицы элем. преобраз. можно сделать единичной, т.е. она — произведение элем. матриц

Перестановка чисел $1,\dots,n$ — числа $1,\dots,n$ в каком-то порядке $i_1,\dots,i_n$

Инверсия $(i_k, i_l) := l > k$, но $i_k > i_l$

неч. кол-во инверсий — знак „−"

Подстановки

S_n — мн-во биекций $\{1,\dots,n\} \to \{n,\dots,1\}$

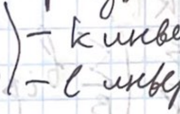
$\sigma \in S_n \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots n \\ \underbrace{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)}_{\text{перестановка}} \end{pmatrix}$ или $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n \end{pmatrix}$ $\sigma(i_k) = j_k$ $\forall\, 1 \le k \le n$

$f: X \to Y \qquad g\circ f = gf: X \to Z$

$g: Y \to Z \qquad$ по опр $(gf)(x) = g(f(x))$

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n \end{pmatrix}$ — k инверсий / — l инверсий $\Rightarrow$ по опр. $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{k+l}$ ← знак, не завис. от записи

$\operatorname{sign}\sigma_1\cdot\sigma_2 = (\operatorname{sign}\sigma_1)(\operatorname{sign}\sigma_2)$

цикл $(i_1,\dots,i_k)$ 

цикл (i,j) — транспозиция $\operatorname{sign}(i,j) = -1$, $\operatorname{sign}(i_1,\dots,i_k) = (-1)^{k-1}$

Алгебра семинар 03.10.2022

Группа $(G,*)$ – называется пара, где G – мн-во,

$* : G \times G \to G$ бинарная операция

Причем 1) $a*(b*c) = (a*b)*c$ (ассоциат.)

2) $\exists e \in G \quad e*g = g*e = g \quad \forall g \in G$ (нейтр. элемент)

3) $\forall g \in G \quad \exists h \in G : g*h = h*g = e$ (сущ. обратного)

перестановки – группа

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ тожд. подстановка

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \quad \sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e$

$A \subseteq B \qquad A \subsetneq B \qquad A \subset B$ – либо $A \subseteq B$

– либо $A \subsetneq B$

$\forall a \in A \; a \in B \qquad A \subseteq B$, но $A \neq B$

Пусть $x, g \in G$, G – группа

gxg^{-1} – сопряженный к x

пусть $\pi = (i_1 \ldots i_k) \underbrace{\ldots}_{\text{незав. циклы}} (j_1 \ldots j_l) \qquad \sigma \pi \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_k)) \ldots (\sigma(j_1) \ldots \sigma(j_l))$

$\sigma^{-1} \cdot \sigma \cdot m = m$

$\sigma(\pi(\sigma^{-1}(m))) = m$

A_n – мн-во четных перестановок / знакопеременная группа

S_n – симметрическая группа

Алгебра семинар 03.10.2022

$A = (a_{ij})$

$\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign}\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ (для A n×n)

10.4 $\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & O \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$ у первой строки только a_{11}, у второй a_{22}

$\sqrt{\sigma(n) = n}$, иначе слагаемое $= 0$

$\operatorname{sgn}((i\,j)) = -1$ $\quad \operatorname{sign}(i_1 \ldots i_k) = (-1)^{k+1}$

$\overset{\shortparallel}{(i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{k-1}, i_k)}$

- св-ва det

- Ф-ла разложения det по i-ой строке

$\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \underset{\text{алг. дополнение}}{A_{ij}}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} ↗ минор

⟵ определитель подматрицы A, полученной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца

- Ф-ла разложения опр. по j-ому столбцу

$\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

- Св-ва det

① эл. преобраз. строк
I: $\underline{a_i}' = \underline{a_i} + \lambda \underline{a_j}$ $\quad \det A' = \det A$
II: $\underline{a_i}' = \underline{a_j}, \underline{a_j}' = \underline{a_i}$ $\quad \det A' = -\det A$
III: $\underline{a_i}' = \underline{\lambda} a_i, \lambda \neq 0$ $\quad \det A' = \lambda \det A$

② $\det A^T = \det A$

③ det A ⇔ строки в A линейно зависимы ⇔ столбцы лин. зависимы

④ $\det(\underline{a_1}\ \underline{a_2} \ldots (\lambda \underline{a_j}' + \mu \underline{a_j}'') \ldots a_n) = \lambda \det(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_j}' \ldots, \underline{a_n}) +$
$+ \mu \det(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_j}'', \ldots, \underline{a_n})$

Определитель Вандермонда

$$\Delta_n^{(x_1,\dots,x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

вычтем

$$= \begin{vmatrix} 0 & (x_1-x_n) & (x_1^2-x_n^2) & \dots & (x_1^{n-1}-x_n^{n-1}) \\ 0 & (x_2-x_n) & (x_2^2-x_n^2) & \dots & (x_2^{n-1}-x_n^{n-1}) \\ - & - & - & - & - \\ 0 & (x_{n-1}-x_n) & (x_{n-1}^2-x_n^2) & \dots & (x_{n-1}^{n-1}-x_n^{n-1}) \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \underbrace{0+\dots+0}_{n-1} + (-1)^{n+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1-x_n & x_1^2-x_n^2 & \dots & x_1^{n-1}-x_n^{n-1} \\ - & - & - & - \\ x_{n-1}-x_n & \dots & \dots & x_{n-1}^{n-1}-x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left[x_i^k - x_n^k = (x_i-x_n)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_n + \dots + x_n^{k-1}) \right] = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1+x_n & x_1^2+x_1x_n+x_n^2 & \dots \\ 1 & x_2+x_n & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x_{n-1}+x_n & \vdots & \dots \end{vmatrix}$$

= [вычтем j-ый столбец из всякого k-ого столбца, при $k>j$, умноженный на x_n^{k-j}, начиная с $j=1$ по $j=n-1$] $= \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \cdot \Delta_{n-1}^{(x_1,\dots,x_{n-1})} =$

$= \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$ → по индукции

Д/З

10.1б, 10.4гд, 11.5, 11.7, 11.10 гд, 12.3(д-з), 13.1(вджиклрс), 13.2(где), 13.3

$\boxed{\text{29 окт — коллоквиум}}$

Алгебра (семинар) 17.10.2022

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$(A|E) \xrightarrow[\substack{\text{преобраз} \\ \text{строк}}]{\text{эл.}} (E|A^{-1}) \leftarrow$ I способ

II способ $A^{-1} = (b_{ij})$ $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A} \rightarrow$ это опр. кв. подматрицы

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\hat{A} = (M_{ij})$ $\hat{A}^T \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}^T$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$AX = B \Rightarrow (A|B) \rightarrow E \cdot (\overset{\text{"}X}{A^{-1}B})$

Д/З 18.3 бгди 18.8вгк 18.1б 18.14 18.21 18.9зи 17.6