Отметим, что утверждение задачи остаётся верным, если рассматривать множества точек круга и квадрата вместе с границей (или даже любыми её участками). Предложим ещё один способ рассуждения. Круг радиуса r можно сдвинуть в начало координат, и тогда его можно задать так: $\{(x, y)\colon x^2+y^2<r^2\}$. Полярные координаты позволяют осуществить биекцию из такого круга с выколотым центром в прямоугольник $P=(0; r)\times[0; 2\pi)$. Согласно задаче 2.172, весь круг также равномощен P. Произвольный квадрат со стороной a можно сдвигом превратить в квадрат $S=[0; a]^2$. Пользуясь континуальностью невырожденных промежутков любого типа и задачей 2.188, получаем, что $P\sim S$.

Можно показать, что множество $\mathbb{R}^n$ континуально для всякого $n\in\mathbb{N}$ (см. задачу 2.189).

Будем говорить, что множество A *по мощности не больше* множества B, а множество B *по мощности не меньше* множества A, если существует инъекция из A в B. Если известно также, что не существует биекции из A в B, то скажем, что A *по мощности меньше* множества B, а множество B *по мощности больше* множества A.

Например, теорема Кантора — Бернштейна утверждает, что если множество A по мощности не больше множества B и множество B по мощности не больше множества A, то множества A и B равномощны.

Перейдём к обсуждению вопроса о неравномощности множества A и множества всех его подмножеств 2^A. Поскольку элементы множества A можно отождествить с его одноэлементными подмножествами, существует естественная инъекция из A в 2^A. Для конечного множества A из n элементов множество его подмножеств 2^A состоит из 2^n элементов (см. задачу 2.55), поэтому инъекции из 2^A в A не существует. В задаче 2.185 мы также видели, что множество $2^{\mathbb{N}}$ континуально. Таким образом, конечное или счётное множество A по мощности строго меньше множества 2^A. Оказывается, что справедливо следующее общее утверждение.

Теорема Кантора. *Для всякого множества A не существует биекции между множеством A и множеством всех его подмножеств 2^A.*

Тем самым, множество 2^A по мощности больше множества A.

Поскольку множеств 2^A и $\{0, 1\}^A$ равномощны, множество всех функций на A, принимающих два значения, по мощности больше множества A. Например, множество всех функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тем более не равномощно $\mathbb{R}$, т. е. не является множеством мощности континуум.

§ 2.6. Множества на числовой прямой

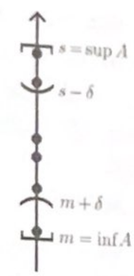
В этом параграфе мы введём ряд важных понятий, связанных с множествами на числовой прямой: точные верхняя и нижняя грани, внутренняя, граничная и предельная точки, открытое и замкнутое множества. Многие из этих понятий вместе со своими свойствами можно перенести на случай множеств из $\mathbb{R}^n$. Более того, они допускают более общий подход, рассматриваемый в такой области математики как топология.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Число b называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) множества A, если $a \leqslant b$ $(a \geqslant b)$ для всех $a \in A$. Если у множества A есть хотя бы одна верхняя (нижняя) грань, то говорят, что это множество *ограничено сверху* (*ограничено снизу*). Если множество A ограничено и сверху, и снизу, то оно называется *ограниченным*.

Точной верхней гранью (*точной нижней гранью*) множества A называется наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней множества A.

Существование точных граней обеспечивается следующим утверждением.

Теорема (принцип полноты Вейерштрасса). *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (точную нижнюю) грань.*



Точную верхнюю грань множества A обозначают $\sup A$ (читается: «супремум А»), точную нижнюю грань множества A обозначают $\inf A$ («инфимум А»).

Равенство $s = \sup A$ равносильно выполнению двух условий:
1) $\forall a \in A$ имеем $a \leqslant s$; 2) $\forall \delta > 0\ \exists a_\delta \in A : a_\delta > s - \delta$.

Точно так же равенство $m = \inf A$ равносильно выполнению условий:
1) $\forall a \in A$ имеем $a \geqslant m$; 2) $\forall \delta > 0\ \exists a_\delta \in A : a_\delta < m + \delta$.

Пусть $A \neq \varnothing$. Если множество верхних границ множества A пусто, т. е. множество A не является ограниченным сверху, то полагают $\sup A = +\infty$; если пусто множество нижних границ (т. е. множество A не является ограниченным снизу), то полагают $\inf A = -\infty$. По определению считают, что $\sup \varnothing = -\infty$, $\inf \varnothing = +\infty$.

Задача 2.211. Найти $\sup\left\{\dfrac{2+m}{3+n} \mid m, n \in \mathbb{N},\ m \leqslant n\right\}$.

Решение. При фиксированном n дробь принимает наибольшее значение, если $m = n$, а при изменении натурального n выражение $\dfrac{2+n}{3+n}$ остаётся меньше единицы и неограниченно приближается к ней при больших n. Получаем гипотезу о том, что точная верхняя грань равна 1. Покажем это по определению.

1) Имеем $\dfrac{2+m}{3+n} \leqslant \dfrac{2+n}{3+n} < 1$, если $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$.

2) Подберём для произвольного $\delta > 0$ такую пару m, n $(m \leqslant n)$, что $\dfrac{2+m}{3+n} > 1 - \delta$. Как мы уже отметили, имеет смысл взять $m = n$. Получаем $2 + n > (1-\delta)(3+n)$, откуда $n > 1/\delta - 3$, а такое n найдётся по аксиоме Архимеда (скажем, можно положить $n = m = [1/\delta] + 1$). □

Задача 2.219. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $B = \{-a : a \in A\}$. Доказать равенства $\inf A = -\sup B$ и $\sup A = -\inf B$.

Решение. Если множество A не является ограниченным снизу, то $\inf A = -\infty$, а поскольку тогда множество B не является ограниченным сверху и $\sup B = +\infty$, заключаем, что $\inf A = -\sup B$. Если же множество A ограничено снизу и $m = \inf A$, то $\forall a \in A$ имеем $a \geqslant m$ (поэтому $-a \leqslant -m$) и $\forall \delta > 0\ \exists a_\delta \in A : a_\delta < m + \delta$

(поэтому $-a_\delta \in B$ и $-a_\delta > -m - \delta$). Таким образом, $\forall b \in B$ имеем $b \leqslant -m$ и $\forall \delta > 0\ \exists b_\delta \in B : b_\delta > -m - \delta$. Значит, $\sup B = -m = -\inf A$.

Поскольку $A = \{-b \colon b \in B\}$, второе равенство вытекает из первого. □

Пусть $f(x)$ — действительнозначная функция и $A \subset D(f)$. *Точной верхней гранью* (*точной нижней гранью*) функции f на множестве A называется точная верхняя (нижняя) грань множества $f(A)$ и обозначается $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ ($\inf\limits_{x\in A} f(x)$). Если $\sup f(A) \in f(A)$ ($\inf f(A) \in f(A)$), то вместо sup (inf) используют также обозначение max (min).

Задача 2.227. Найти $\inf\limits_{x\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{x} - \cos x\right)$.

Решение. При изменении x вдоль луча $[1; +\infty)$ величина $1/x$ всё ближе подходит к нулю, а косинус колеблется от -1 до 1. Таким образом, предполагаемым значением инфимума является -1. Покажем это по определению.

1) При $x \geqslant 1$ имеем $1/x - \cos x > 0 - 1 = -1$.

2) Подберём для произвольного $\delta > 0$ такое число $x \geqslant 1$, что $1/x - \cos x < < -1 + \delta$. Функция $-\cos x$ принимает наименьшее значение при аргументах вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, поэтому будем рассматривать именно такие значения x. Итак, нам требуется получить неравенство $\dfrac{1}{2\pi n} - \cos 2\pi n < -1 + \delta$, то есть $n > \dfrac{1}{2\pi\delta}$. Поэтому достаточно положить $n = \left[\dfrac{1}{2\pi\delta}\right] + 1$, тогда $x = 2\pi n$ удовлетворяет требуемому неравенству и, кроме того, $x \geqslant 1$, так как $n \geqslant 1$. □

Для любого $\delta > 0$ интервал $(a - \delta; a + \delta)$ называется *δ-окрестностью* точки a и обозначается $U_\delta(a)$. Иначе говоря,

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - a| < \delta\}.$$

Множество

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - a| < \delta\}$$

называется *проколотой δ-окрестностью* точки a.

Введём классификацию точек числовой прямой по отношению к данному множеству A.

Точка x называется *внутренней* точкой множества A, если существует её δ-окрестность $U_\delta(x)$, целиком содержащаяся в множестве A, т.е.

$$\exists \delta > 0 \colon U_\delta(x) \subset A.$$

Точка x называется *внешней* точкой множества A, если существует её δ-окрестность $U_\delta(x)$, не имеющая общих точек с множеством A, т.е.

$$\exists \delta > 0 \colon U_\delta(x) \cap A = \varnothing.$$

Точка x называется *граничной* точкой множества A, если любая её δ-окрестность содержит как точку, принадлежащую A, так и точку, не принадлежащую A, т.е.

$$\forall \delta > 0 \text{ имеем } U_\delta(x) \cap A \neq \varnothing \text{ и } U_\delta(x) \cap A^{\text{com}} \neq \varnothing.$$

Иными словами, точка x — граничная для множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой A. Множество всех граничных точек множества A обозначается через ∂A.

Задача 2.238. Найти все граничные точки множества $A=(0;1]\cup\{2\}$.

Решение. Всякая точка интервала $(0;1)$ является внутренней точкой множества A: если выбрать $\delta=\min(1-x,x)$, то вся окрестность $U_\delta(x)$ попадёт в интервал $(0;1)$, а значит, и во множество A. Всякая точка x множества $B=(-\infty;0)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ является внешней точкой множества A. В самом деле, если выбрать $\delta=\min(|x-2|,|x-1|,|x|)$, то вся окрестность $U_\delta(x)$ лежит во множестве B и не пересекается с A.

Далее, точка 2 является граничной, поскольку в любой её окрестности есть сама двойка, которая принадлежит множеству A, а всякая точка этой окрестности, лежащая правее 2, не принадлежит множеству A. Точка 0 граничная, потому что сама она не лежит в A, но в любой окрестности $U_\delta(0)$ точка $\min(\delta/2,1)$ принадлежит A. Аналогично, точка 1 граничная, так как сама лежит в A, а в любой окрестности $U_\delta(1)$ точка $1+\min(\delta/2,1/2)$ не принадлежит A. □

Задача 2.240. Пусть множество A ограничено сверху и $s=\sup A$. Доказать, что s — граничная точка множества A.

Решение. Рассмотрим произвольную δ-окрестность $U_\delta(s)$ точки s. Поскольку s — верхняя грань множества A, пересечение $U_\delta(s)\cap(s;+\infty)$ не содержит ни одного элемента множества A. С другой стороны, из определения точной верхней грани следует, что пересечение $(-\infty;s)\cap U_\delta(s)$ содержит хотя бы один элемент множества A. Таким образом, всякая δ-окрестность $U_\delta(s)$ точки s содержит как точку, принадлежащую A, так и точку, не принадлежащую A, поэтому s — граничная точка множества A. □

Определение. Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым*; множество называется *замкнутым*, если его дополнение является открытым.

Задача 2.248. Привести пример промежутка, который является а) открытым; б) замкнутым; в) не открытым и не замкнутым; г) и открытым, и замкнутым.

Решение. а) Любой интервал $(a;b)$ является открытым множеством, поскольку для всех $c\in(a;b)$ имеем $U_\delta(c)\subset(a;b)$ при $\delta<\min\{c-a,\,b-c\}$.

б) Всякий отрезок $[a;b]$ замкнут, так как его дополнение $(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$ открыто (проверьте!).

в) Всякий полуинтервал $(a;b]$ не открыт и не замкнут. Принадлежащая ему точка b является граничной, а не внутренней, поэтому он не открыт. По аналогичным причинам не является открытым и его дополнение $(-\infty;a]\cup(b;+\infty)$, следовательно, множество $(a;b]$ не замкнуто.

г) Числовая прямая $\mathbb{R}$ — открытое множество, так как содержит в себе все окрестности всех точек. Дополнение $\mathbb{R}$ пусто и поэтому открыто, следовательно, $\mathbb{R}$ ещё и замкнуто. □

Теорема. *Объединение любого набора и пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством. Пересечение любого набора и объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Структура открытых множеств описывается следующим утверждением.

Теорема. *Всякое открытое множество в $\mathbb{R}$ или пусто, или совпадает с $\mathbb{R}$, или является объединением не более чем счётного набора попарно непересекающихся интервалов и лучей.*

Обсудим ещё один способ классифицировать точки числовой прямой по отношению к данному множеству A.

Точка x называется *предельной* точкой множества A, если в любой её проколотой δ-окрестности $\mathring{U}_\delta(x)$ содержится хотя бы одна точка множества A:

$$\forall\delta > 0 \text{ имеем } \mathring{U}_\delta(x) \cap A \neq \varnothing;$$

точка x называется *изолированной* точкой множества A, если существует её δ-окрестность $U_\delta(x)$, не содержащая других точек множества A, кроме x:

$$\exists\delta > 0\colon U_\delta(x) \cap A = \{x\}.$$

Таким образом, всякая точка числовой прямой по отношению к данному множеству A является или предельной, или изолированной, или внешней.

Задача 2.266. Доказать, что всякая изолированная точка множества является его граничной точкой.

Решение. Пусть x — изолированная точка множества A. Это означает, что существует её δ-окрестность $U_\delta(x)$, не содержащая других точек множества A, кроме x. Значит, всякая окрестность точки x содержит как точку, принадлежащую A (саму точку x), так и точки, не принадлежащие A, поэтому x — граничная точка множества A. □

Задача 2.269. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $\inf|x-y| = \delta > 0$, где инфимум берётся по различным $x, y \in A$. Доказать, что множество A не имеет предельных точек.

Решение. Пусть a — предельная точка множества A. Тогда в $\mathring{U}_{\delta/2}(a)$ найдётся $x \in A$, а в $\mathring{U}_\rho(a)$, где $\rho = |x-a|$, найдётся $y \in A$, причём элементы x и y различны, так как $|y-a| < \rho = |x-a|$. Цепочка соотношений

$$|x-y| = |(x-a)-(y-a)| \leqslant |x-a| + |y-a| < 2|x-a| < \delta$$

приводит к противоречию с условием. □

Задача 2.274. Доказать, что множество A замкнуто тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий:

а) множество A содержит все свои граничные точки;

б) множество A содержит все свои предельные точки.

Решение. а) Граничные точки являются общими для множества и его дополнения (см. задачу 2.239). Открытое множество состоит только из внутренних точек, поэтому все его граничные точки принадлежат дополнению. Таким образом, если множество A замкнуто, то его дополнение A^{com} открыто, и поэтому не содержит точек из $\partial A = \partial A^{\mathrm{com}}$. Значит, все граничные точки замкнутого множества A лежат в нём же. Обратно, если все граничные точки лежат в множестве A, то его дополнение не содержит граничных точек и поэтому открыто. А тогда A замкнуто.

б) Каждая предельная точка множества является для него внутренней или граничной (см. задачу 2.262). Внутренние точки всегда принадлежат множеству, а в силу предыдущего пункта для любого замкнутого множества A имеем $\partial A \subset A$. Следовательно, множество A содержит все свои предельные точки. Обратно, пусть множество A содержит все свои предельные точки. Любая граничная точка множества A либо предельная, либо изолированная для A. Но изолированные точки всегда принадлежат множеству, поэтому A содержит все свои граничные точки и, значит, замкнуто. □

Множество всех предельных точек множества A обозначается через A'; множество $A \cup A'$ называется *замыканием* множества A и обозначается $\overline{A}$.

Теорема (Больцано). *Всякое бесконечное ограниченное множество на числовой прямой имеет хотя бы одну предельную точку.*

Задача 2.279. Пусть отрезок $[a; b]$ представлен в виде не более чем счётного объединения множеств. Доказать, что хотя бы одно из них имеет предельную точку.

Решение. Если бы ни у одного из этих множеств предельных точек не было, то все эти ограниченные (лежащие в $[a; b]$) множества были бы по теореме Больцано конечными, поэтому их конечное или счётное объединение не могло бы быть отрезком — континуальным множеством. □

Говорят, что система множеств $\{A_s\}$, $s \in S$, *покрывает* множество A (образует *покрытие* множества A), если $A \subset \bigcup\limits_{s \in S} A_s$. Часто возникает вопрос о построении *подпокрытия* множества A, т. е. такого покрытия множества A, которое является подсистемой исходной системы.

Задача 2.289. Привести пример покрытия луча $[0; +\infty)$ интервалами, из которого нельзя извлечь конечного подпокрытия.

Решение. Рассмотрим систему интервалов $(-1; n)$, $n \in \mathbb{N}$. Каждая точка $x \geqslant 0$ принадлежит каждому интервалу $(-1; n)$ при $n > x$, поэтому $[0; +\infty) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-1; n)$. Однако конечного покрытия извлечь отсюда нельзя, поскольку конечное объединение интервалов — это ограниченное множество, которое не может покрывать неограниченный луч $[0; +\infty)$. □

Задача 2.293. Показать, что интервал $(0; 1)$ покрывается системой интервалов $(1/(n+2); 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Можно ли выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие? Можно ли это сделать, если к системе интервалов добавить интервал $(0; 0{,}001)$?

Решение. Полагая $n = [1/x]$ для всякого $x \in (0; 1)$, имеем $1 \leqslant n \leqslant 1/x < n+1$, откуда $1/(n+1) < x \leqslant 1/n$ и если $x < 1/n$, то $x \in (1/(n+2); 1/n)$. Если же $x = 1/n$, то $n > 1$ и $x \in (1/(n+1); 1/(n-1))$, $n-1 \in \mathbb{N}$. Таким образом, всякий элемент интервала $(0; 1)$ лежит в одном из интервалов системы, которые тем самым образуют покрытие интервала $(0; 1)$.

Рассмотрим теперь произвольную конечную подсистему данной системы. Каждому интервалу соответствует его номер $n \in \mathbb{N}$. Пусть N — наибольший номер принадлежащих подсистеме интервалов. Тогда любой $x \in (0; 1/(N+2)]$ не попадает в подсистему, так как $x \leqslant 1/(N+2) \leqslant 1/(n+2)$ для всех номеров n интервалов подсистемы. Поэтому подсистема не является подпокрытием интервала $(0; 1)$. Однако конечная система $(0; 1/1000)$, $(1/1001; 1/999)$, $(1/1000; 1/998)$, ..., $(1/3; 1)$ уже образует покрытие интервала $(0; 1)$. □

Теорема о конечном покрытии. *В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

Утверждение теоремы верно не только для отрезка, на и для всякого ограниченного замкнутого множества на числовой прямой (такие множества называют *компактами*).

Отметим, что изменение типов промежутков в этих утверждениях, вообще говоря, не допускается (см. задачу 2.294).

Задача 2.296. Пусть $[a; b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — замкнутые множества. Докажем, что существуют такие отрезок $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ и число n_0, что $[\alpha; \beta] \subset F_{n_0}$.

Решение. Построим доказательство от противного, т. е. предположим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall [\alpha; \beta] \subset [a; b]$ найдётся точка $c \in [\alpha; \beta] \cap F_n^{\text{com}}$. Возьмём произвольный отрезок $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ и найдём точку $c_1 \in [a_1; b_1] \cap F_1^{\text{com}}$. Множество F_1^{com} открыто как дополнение к замкнутому, следовательно, существует окрестность точки c_1, полностью лежащая в F_1^{com}, т. е. $U(c_1) \subset F_1^{\text{com}}$. Пересечение $(a_1; b_1) \cap U(c_1)$ является интервалом $(\alpha; \beta) \subset (a_1; b_1) \cap F_1^{\text{com}}$. Возьмём в этом интервале произвольный отрезок $[a_2; b_2]$, тогда $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1]$ и $[a_2; b_2] \cap F_1 = \varnothing$. Последовательно применяя то же рассуждение, получим совокупность таких отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем $[a; b] \supset [a_n; b_n] \supset$ $\supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$ и $[a_{n+1}; b_{n+1}] \cap F_n = \varnothing$. Точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$ не принадлежит $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, что противоречит условию $[a; b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Построим множество, известное как множество Кантора. Разделим отрезок $K_0 = [0; 1]$ на три равные части и исключим средний интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ (см. рис. 12). Оставшееся множество обозначим через K_1, $K_1 = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] =$

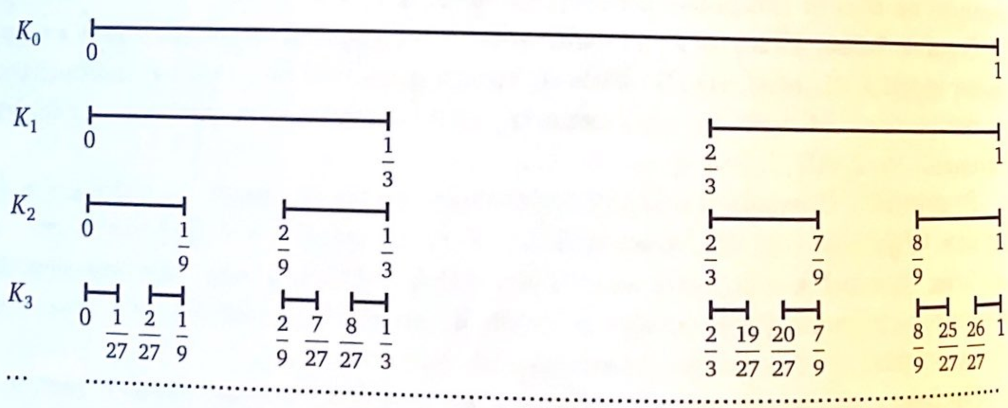


Рис. 12

$= K_1^1 \cup K_1^2$. На втором шаге исключим средние интервалы $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$ из отрезков K_1^1 и K_1^2, оставшуюся часть обозначим

$$K_2 = \left[0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}; 1\right] = K_2^1 \cup K_2^2 \cup K_2^3 \cup K_2^4.$$

Продолжая этот процесс, на n-м шаге удалим средние трети из оставшихся 2^{n-1} отрезков и получим множество $K_n = \bigcup\limits_{j=1}^{2^n} K_n^j$, состоящее из объединения 2^n непересекающихся отрезков длины 3^{-n}. В итоге получим бесконечную вложенную систему замкнутых множеств $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ *Множество Кантора* K определим как $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$.

Непосредственно из построения видно, что $K = [0; 1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k; b_k)$, где $(a_k; b_k)$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность всех исключённых интервалов (эти интервалы также называют *смежными*). Концы этих интервалов принадлежат K и называются точками *первого рода* множества Кантора, остальные его точки называются точками *второго рода*.

Задача 2.297. Найти сумму длин смежных интервалов множества Кантора.

Решение. При построении множества Кантора на n-м шаге было исключено 2^{n-1} интервалов длины 3^n. Таким образом, суммарная длина всех интервалов равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1,$$

т.е. длине всего отрезка $[0; 1]$. □

Можно показать, что множество Кантора замкнуто, не содержит изолированных точек и континуально (см. задачи 2.298, 2.300 и 2.302).

Задачи

2.1°. Привести пример непустого подмножества множества $\mathbb{Z}$, не имеющего минимального элемента.

2.2. Пусть непустое множество $A \subset \mathbb{Z}$ ограничено снизу. Доказать, что в множестве A есть минимальный элемент.

2.3°. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a \in \mathbb{Q}\colon 0 < a < \frac{1}{n}$.

2.4°. Пусть $\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_1}{q_1} > 0$. Доказать, что $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} < \frac{p_2}{q_2}$.

2.5. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Доказать, что существует такое число $c \in \mathbb{Q}$, что $a < c < b$.

2.6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A = \left\{\frac{p}{q}\colon p \in \mathbb{N}, q \leqslant n\right\}$. Найти $\min A$.

√**2.7.** Доказать, что множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не имеет минимального элемента.

2.8. Пусть натуральное число n не является полным квадратом. Доказать, что $\sqrt{n} \in \mathbb{A}$, но $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

√**2.9.** Доказать, что число $\sqrt[n]{2}$ алгебраическое и иррациональное при $n \geqslant 2$.