2.202. *Прямым произведением* $\prod\limits_{s\in S} A_s$ бесконечного набора множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех функций, сопоставляющих каждому элементу $s \in S$ элемент множества A_s. Пусть $A_s \sim B_s$ при всех $s \in S$. Доказать, что $\prod\limits_{s\in S} A_s \sim \prod\limits_{s\in S} B_s$.

2.203*. Доказать, что множества $\mathbb{N}^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$ континуальны.

2.204*. Доказать, что объединение континуального набора континуальных множеств является континуальным множеством.

2.205*. Пусть множество $A \cup B$ равномощно отрезку $[0; 1]$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B равномощно отрезку $[0; 1]$.

✓**2.206°.** Привести пример ограниченного сверху множества $A \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию: а) $\sup A \in A$; б) $\sup A \notin A$.

2.207°. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $m = \min A$. Доказать, что $m = \inf A$.

✓**2.208°.** Пусть $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Доказать, что $\inf A \geqslant \inf B$ и $\sup A \leqslant \sup B$.

2.209°. Пусть $A \subset B \subset \mathbb{R}$ и множество A не ограничено сверху. Доказать, что множество B также не ограничено сверху.

Найти точную верхнюю или нижнюю грань множества (2.210–2.218).

2.210°. $\sup\left\{\frac{2m}{3n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}$. ◇ **2.211.** $\sup\left\{\frac{2+m}{3+n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n\right\}$.

✓**2.212.** $\inf\left\{\frac{5+m}{3+n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \geqslant n\right\}$. **2.213.** $\sup\left\{\frac{3+m}{2+n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n\right\}$.

✓**2.214.** $\sup\left\{\frac{1+m}{3+2n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n\right\}$. **2.215.** $\sup\left\{\frac{m^2}{m^2+3m+5} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$.

2.216. $\inf\left\{\frac{m^2}{2m^2-4m+3} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$. **2.217°.** $\sup\left\{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

2.218*. $\sup\left\{\sin\frac{2m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n\right\}$.

◇ **2.219.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $B = \{-a\colon a \in A\}$. Доказать равенства $\inf A = -\sup B$ и $\sup A = -\inf B$.

✓**2.220.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$, $C = \{a+b\colon a \in A, b \in B\}$, $D = \{a-b\colon a \in A, b \in B\}$. Доказать равенства $\sup C = \sup A + \sup B$ и $\sup D = \sup A - \inf B$.

✓**2.221°.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и для всякого $k > 0$ положим $A_k = \{ka\colon a \in A\}$. Доказать равенства $\sup A_k = k \sup A$ и $\inf A_k = k \inf A$.

2.222. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $\inf A > 0$ и $B = \left\{\frac{1}{a}\colon a \in A\right\}$. Доказать, что $\sup B = \frac{1}{\inf A}$.

2.223. Пусть A и B — непустые подмножества луча $(0; +\infty)$, $C = \{ab\colon a \in A, b \in B\}$. Доказать, что $\sup C = \sup A \cdot \sup B$.

2.224. Доказать, что $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

2.225°. Найти $\inf\limits_{x\in A} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in A} f(x)$, если

✓а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A = (0; 1]$; б) $f(x) = 2^{-x}$, $A = (0; +\infty)$;
✓в) $f(x) = \{x\}$, $A = [0; 2]$; г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $A = \mathbb{R}$;
д) $f(x) = \log_2 x$, $A = (0; 1)$; е) $f(x) = 1 + \sin^2 x$, $A = \mathbb{R}$;
✓ж) $f(x) = \log_2 \log_2 x$, $A = (1; +\infty)$; з) $f(x) = \frac{5x+1}{3x-2}$, $A = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.