06.09.2022 (Матан (лекция))

Подольский Владимир Евгеньевич

Кудрявцев; Ильин, Садовничий

Элементы теории множеств

Неопр. понятия: мн-во и его эл-ты

$b \notin A \Leftrightarrow b \in A$

Кванторы: $\forall, \exists, \nexists; \exists!$

Операции над мн-вами: • $A \cup B \ni a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in B \end{array}\right.$ • $A \cap B \ni a \Leftrightarrow \begin{cases} A \ni a \\ a \in B \end{cases}$

• $a \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ a \notin B \end{cases}$ • Взятие подмножества

Def (опр) A – подмнож. B, если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$

$A \subset B$ $\varnothing$ – подмнож. всех мн-в | несобств.
A – подмнож A

Примеры 1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Д-во $\begin{cases} a \in A \\ a \in B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ \left[\begin{array}{l} a \in B \\ a \in C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in A \\ a \in B \end{cases} \\ \begin{cases} a \in A \\ a \in C \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in B \cap A \\ a \in A \cap C \end{array}\right.$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Прямое произведение мн-в (Декартово):

Def Если $\exists a \in A$, то, если $A \setminus \{a\} = \varnothing$, то A наз-я одноэлементным

Def Если $\exists a \in A$, то, если $A \setminus \{a\}$ = одноэлемное, то A – двухэлементное

Def Пусть $a \in A$, $b \in B$. Множество $\{a; b\}$ – пара эл-ов A и B

Def Пусть $a \in A$, $b \in B$. Пара $\{a; \{a; b\}\}$ – упорядоченная пара a и b, обозначается (a, b)

Def Мн-во всех упор. пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$ назыв. прямым произведением $(A \times B)$

Отображение множеств

Def Расм. A и B, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, Расм $A \times B$. Пусть $F \subset A \times B$:
если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F$ и $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ $\Rightarrow$ F – отображение м/у A и

08.09.2022 Матан (лекция)

Def Пусть $F \subset X \times Y$ - отображение

Подмножество $X \supset \mathcal{D}(F)$ (или $\mathcal{D}_F$) называется областью определения F, если $\forall (x,y) \in F$ $x \in \mathcal{D}(F)$ и $\forall x \in \mathcal{D}(F)$ $\exists (x,y) \in F$

Подмножество $Y \supset R(F)$ (или R_F) назыв. областью значений F, если $\forall (x,y) \in F$ $y \in R(F)$ и $\forall y \in R(F)$ $\exists (x,y) \in F$

Def Пусть $F \subset X \times Y$ - отобр.

Если $\forall (x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2) \in F$ при $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$, то F - инъекция

Если $R(F) = Y$, то F - сюръекция (отображение на)

Если F - инъекция и сюръекция $\Rightarrow F$ - биекция (взаимно однознач. отображение)

Если F - инъекция, то F м/у $\mathcal{D}(F)$ и $R(F)$ F - биекция

Def Пусть $F \subset X \times Y$ - отображение

Пусть $X_1 \subset X$. Подмножество F_1 ($F_1 \subset F$) такое, что $\forall (x,y) \in F_1$ $x \in X_1$

Тогда F_1 - ограничение F на X_1 и обознач $F_1 = F|_{X_1}$

Def Пусть $F \subset X \times Y$ - отображение

$Y \supset Y_1 = \{y \in Y :$ при $x \in X_1 (\subset X)$ $(x,y) \in F\}$ — образ X_1

$\circledast$ $Y_1 = R(F_1 = F|_{X_1})$

Def Пусть $F \subset X \times Y$ - отображение

$X \supset X_1 = \{x \in X :$ при $y \in Y_1 (\subset Y)$ $\exists (x,y) \in F\}$ - полный прообраз Y_1

Def Пусть $F \subset X \times Y$ - отображение

Если $\forall$ одноэлементного подмн-ва $\{y\} \subset Y$ полный прообраз является однозн. подмн-вом $\{x\} \subset X$, то $\exists$ обратное отображение F^{-1} из пар вида (y, x) $(\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2)$

Утв. $\exists$ обратное отображение $\Leftrightarrow F$ - биекция $(\mathcal{D}(F) \times R(F))$

Д-во: $(\forall y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2)$ (из-за однозн. отобр $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$) каждому соотв. один эл-т

Натуральные числа

Def (аксиоматика Пеано) Рассмотрим мн-во $\mathbb{N}$ такое, что

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists! \bar{n} \in \mathbb{N}$, называемый „следующим" для n

инъекция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ не более одного элемента $\mathbb{N}$, для которого n - следующее

3) $\exists!$ $1 \in \mathbb{N}$, который не является следующим

4) (аксиома индукции)

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ такое, что: $\cdot\ 1 \in M$

$\cdot\ \forall m \in M$ $\bar{m} \in M$

Тогда $M = \mathbb{N}$

Такое $\mathbb{N}$ — мн-во натуральных чисел

Def Мн-во A такое, что $\exists$ биекция м/у A и $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ называется n-элементным. n - <u>количество</u> эл-тов в A

Количество эл-тов в $\varnothing$ обознач. 0(ноль).

$\varnothing$ и все n-элем-ные — конечные мн-ва

Все мн-ва, кот. не конечные, — бесконечные ($\mathbb{N}$)

Матан (лекция) 13.09.2022

$F \subset X \times Y \Leftrightarrow F: X \to Y$; $y = F(x) \Rightarrow (x, y) \in F \subset X \times Y$

Кол-во эл-ов обознач. card A (cardinal) или $|A|$ или $(\#A)$

Def $\forall A \subset X \times Y$ наз-ся отношением

$(x, y) \in A \Leftrightarrow xAy$

Def Отношение $A \subset X \times X$ наз-ся отношением порядка, если

1) $\forall x, y \in X$ верно xAy или yAx
2) Если xAy и yAx, то $x = y$
3) Если xAy и yAz, то yAz

Отн. порядка обычно обозначается "$\leq$" ($xAy \Leftrightarrow x \leq y$)

Th На $\mathbb{N}$ $\exists!$ отн. порядка такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq \bar{n}$

Д-во: без д-ва ☐ (! на экзамене без док-ва)

Сумма натуральных чисел:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ суммой n и 1 (обознач. $n+1$) называется $\bar{n}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ суммой n и 2 $(n+2)$ называется сумма $\overline{n+1}$

и т.д. (типо индукция)

Th $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$

- $n + m = m + n$ — коммутативно
- $(n+m)+k = n + (m+k)$

Д-во: без д-ва ☐

Замечание: Сумму n и m можно вводить так:

пусть $|A| = n$, $|B| = m$, $A \cap B = \varnothing$, тогда $|A \cup B| = n + m$

(количественный подход)

Произведение натуральных чисел:

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ $n \cdot k = nk = \underbrace{(k + k + \ldots + k)}_{n \text{ раз}}$

Th

- $nk = kn$ — коммутативно
- $(nk)m = n(km)$ — ассоциативно

Д-во: без д-ва ☐

Частичные операции на $\mathbb{N}$:

Если $n>m$, то определена разность

$n-m=k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n=m+k$

Если $n=m\cdot k$, то опр-но отношение $\frac{n}{k}=n:k=m$ $\left(\frac{n}{m}=k\right)$

Целые числа

Мн-во $\{\ldots,-n,\ldots,-2,-1\}\cup\{0\}\cup\{1,2,\ldots,n,\ldots\}=\mathbb{Z}$

- $\forall n,m\in\mathbb{N},\ n>m:\ -n<-m$
- $\forall n\in\mathbb{N}\quad -n<0$
- $\forall n,m\in\mathbb{N}\quad -m<n$

сложение:

- $-n-m=-(n+m)$
- $n+(-m)=\begin{cases}\text{если } n>m, \text{ то } n-m\\ \text{если } n=m, \text{ то } 0\\ \text{если } n<m, \text{ то } -(m-n)\end{cases}$
- $(-n)\overset{\shortparallel}{+}(-m)$

умножение
целых
Матан (лекция) 15.09.2022

$\forall m,n \in \mathbb{Z}$ $m\cdot n = mn = \begin{cases} m\cdot n, & m,n\in\mathbb{N} \\ 0, & m=0 \text{ или } n=0 \\ (-1)\cdot(-1)=1 \\ (-1)\cdot n = -n, & n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Про деление дополнительно:

$m\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ на "0" нельзя делить

Def Мн-во $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ называется мн-вом рациональных чисел, если введены след-ие операции и выполнены св-ва:

$(m,n)\in\mathbb{Q}$ обычно записывается как $\frac{m}{n}\begin{smallmatrix}\in\mathbb{Z}\\ \in\mathbb{N}\end{smallmatrix}$

- сложение: $\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$ – коммутативно и ассоциативно
- умножение: $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}$ – коммутативно и ассоциативно
- есть "0": $\frac{0}{n}$ $\left(0+\frac{n}{m}=\frac{n}{m}+0=\frac{n}{m}\right)$
- если $m_1n_2=m_2n_1$, то $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}$
- есть "1": $\frac{1}{1}$ $\left(1\cdot\frac{n}{m}=\frac{n}{m}\cdot 1=\frac{n}{m}\right)$
- есть отношение порядка $\left(\frac{m_1}{n_1}\le\frac{m_2}{n_2}\right.$, ~~[illegible]~~ если $\left.m_1n_2\le m_2n_1\right)$

Замечание Подмн-во $\mathbb{Q}$: $\left\{\ldots -\frac{n}{1};\ldots -\frac{2}{1};-\frac{1}{1};\frac{0}{1};\frac{1}{1};\frac{2}{1};\ldots;\frac{n}{1};\ldots\right\}$

можно отождествить с $\mathbb{Z}$ с сохранением всех необходимых св-в и операций

$\Rightarrow$ будем отождествлять $\left(\frac{n}{1}=n\right)$

Числовые поля

Def Упоряд-ным числовым полем называется мн-во A с введенными операциями и св-вами (аксиомами)

1) $\forall a,b\in A$ $a+b=b+a$
2) $\forall a,b,c\in A$ $(a+b)+c=a+(b+c)$
3) $\exists!$ "0" $\in A$, $\forall a\in A$ $a+0=a$
4) $\forall a\in A$ $\exists!(-a)\in A: a+(-a)=0$
5) $\forall a,b\in A$ $a\cdot b=b\cdot a$
6) $\forall a,b,c\in A$ $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$
7) $\exists!$ "1" $\in A$: $\forall a\in A$ $1\cdot a=a\cdot 1=a$
8) ~~$\exists$~~ $\forall a\in A\setminus\{0\}$ $\exists!\, a^{-1}: a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$
9) (дистрибут) $\forall a,b,c\in A$ $a(b+c)=ab+ac$
10) $\forall a,b\in A$ $a\le b$ или ~~[illegible]~~ $b\le a$ (введено отн. пор.)
11) Если $a\le b$ и $b\le a$, то $a=b$
12) Если $a\le b$ и $b\le c$, то $a\le c$

13) $\forall c \in A$ если $a \le b$, то $a+c \le b+c$ 14) $\forall c \in A, c>0$ если $a \le b$, то $ac \le bc$

Def. Упорядоченное числовое поле A называется Архимедовым, если выполнена аксиома Архимеда:

15) $\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}$, что $1 \cdot n \ge a$

не из $\mathbb{N}$, а из A (сложить 1 из поля n раз)

3) поле неограничено (пример: $\mathbb{Q}$ - архимедово УЧП)

Действительные числа

Def архимедово УЧП называется мн-вом (полем) действительных чисел $\mathbb{R}$, если выполнена аксиома полноты:

16) Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, такие, что $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$ $a \le b$.

Говорят, что выполнено, если $\forall A$ и B $\exists c \in \mathbb{R}$, что $\forall a, b$ $a \le c \le b$

(Пример: $\mathbb{Q} \ne \mathbb{R}$: пусть $A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ что } \frac{p}{q} > 0, \frac{p^2}{q^2} \le 2 \right\}$, но $\nexists c \in \mathbb{Q}$

$B = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ что } \frac{p}{q} > 0, \frac{p^2}{q^2} \ge 2 \right\}$ удовл. 16

Матан (лекция) 20.09.2022

Модели $\mathbb{R}$

① Модель Бесконечных Десятичных Дробей (БДД)

<u>Def</u> Отобр $F: \mathbb{N} \to X$ наз-ся посл-ть эл-тов $X: \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

<u>Замечание</u>: Запись упорядоченных пар из F в виде X_λ, $\lambda \in \mathcal{L}$, $x \in X$ наз-ся индексацией

<u>Def</u> Беск. десятич. дробь — объект из знака "+" или "−", нат. числа или 0 и последовательности из эл-тов мн-ва $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ — „цифры"

б.д.д. $a = \pm \underset{\in \{\mathbb{N}, 0\}}{a_0}, a_1 a_2 \dots \underset{\in A}{a_n} \dots$

(Знак ± не применяется для $0,(0)$)

При этом считаем равными $\pm a_0, a_1, \dots, a_n (9) = \pm a_0, a_1 \dots [a_n+1]$

<u>Def</u> На мн-ве $\{б.д.д.\}$ введём отношение порядка:

1) $-a_0, a_1 \dots < +b_0, b_1 \dots$ или $0,(0)$

2) $+a_0, a_1 \dots < +b_0, b_1 \dots$, если $a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0, a_1 < b_1$ или $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 < b_2$

3) $-a_0, a_1 \dots < -b_0, b_1 \dots$, если $+b_0, b_1 \dots < +a_0, a_1 \dots$

<u>Th.</u> На $\{б.д.д.\}$ с введённым "$\le$" выполнена аксиома полноты

<u>Д-во</u> пусть $A \subset \{б.д.д.\}$, $B \subset \{б.д.д.\}$, $A \cap B = \varnothing$, $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \le b$

! 1) $\forall a = -a_0, \dots;\ \forall b = +b_0, \dots \Rightarrow c = 0,(0)$

↓ подними архивы

2) $\forall a = +a_0, \dots$, $\forall b = +b_0, \dots$

обозначим $\overline{b}_0 = \min\{b_0 : b \in B\} \Rightarrow B_1 = \{b \in B : b = \overline{b}_0, \dots\} \subset$

$B_1 \ne \varnothing$ ($\exists \overline{b}_0$ (для подмн-ва $\mathbb{N}$ $\exists \min$))

$\overline{b}_1 = \min\{b_1 : b \in B_1\} \Rightarrow B_2 = \{b \in B_1 : b = \overline{b}_0, \overline{b}_1 \dots\} \ne \varnothing$

и т.д. (все B_i непусты)

Тогда $c = \overline{b}_0, \overline{b}_1 \dots \overline{b}_n \dots$ подходит

<u>Действительно</u> $\forall b \in B$ $c \le b$ по построению

Докажем от противного, что $a \le c$. Действительно, если $\exists a > c$, то $\exists n \in \mathbb{N}$, что $a_n > b_n$, но тогда $a > b\ \forall b \in B_{n+1}$
⇒ противоречие

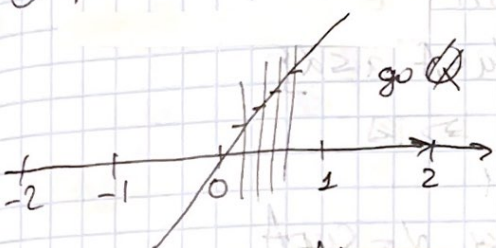
3) $a = -a_0, \dots$, $b = -b_0, \dots$ ⇒ переходим к $-b$ и $-a$ и т.д., перевернем потом

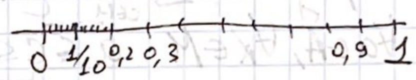
4) A содержит пол. $a = -a_0, \dots$ так и $a = +a_0, \dots$ (или B —"—)
очевидно

Th. На {б.д.д.} с введенным "$\le$" и "$\cdot$" (умножения) так, что будут выпол-ся все аксиомы 1-16

Д. без д-ва

2 Геом модель (числовая прямая)





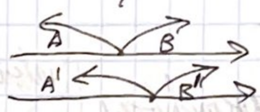
Матан (лекция) 22.09.2022

06.10.2022 коллоквиум

3 Сечение $\mathbb{Q}$ (Дедекинда)

Def Пара $\{A, B\}$ подмн-в $A \subset \mathbb{Q}$, $B \subset \mathbb{Q}$, $A \ne \emptyset$, $B \ne \emptyset$ наз-ся сечением $\mathbb{Q}$, если $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a < b$ и в B $\nexists$ наименьшего эл-та

Th. На мн-ве всех сечений $\mathbb{Q}$ можно ввести "+", "$\cdot$", "$\le$" так, что выполняются аксиомы 1-16. Д-во без д-ва ■



⇒ $A \subset A'$ ⇒ $\{A; B\} < \{A'; B'\}$ → действительные числа

Принципы полноты

Def Рассмотрим $A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$
Если $\exists a' \in A : \forall a \in A\ a' \le a\ (a' \ge a)$ ⇒ a' — минимальный (максимальный) элементом A
обозн. $a' = \min A$ ($\max A$)

Def Рассмотрим $A \subset \mathbb{R}, A \neq 0$

Если $\exists \alpha \in \mathbb{R}: \forall a \in A \quad a \leq \alpha \ (a \geq \alpha)$, то A - ограниченное сверху (снизу)

α — верхней (нижней) гранью A

Если A огр. и сверху, и снизу, то A – ограниченное.

Def Пусть A огр. сверху (снизу) и $M = \{\alpha: \forall a \in A, a \leq \alpha\}$

$\left(m = \{\beta: \forall a \in A, a \geq \beta\}\right) \Rightarrow$ $\min M$ наз-ся точной верхней гранью $A \to \sup A$

(max m наз-ся точной нижней гранью $A \to \inf A$)

Д-м корректность определения:

Th (принцип полноты (W)) → Вейерштрасса

$\forall$ огр. сверху (снизу) $A \subset \mathbb{R}, A \neq 0 \quad \exists \sup A \ (\inf A)$

Д-во: A - огр сверху $\Rightarrow \exists M = \{\alpha: \forall a \in A \ a \leq \alpha\}$

$\overset{(16)}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, \forall \alpha \in M \quad a \leq \underbrace{c \leq \alpha}_{c = \min M} \Rightarrow \blacksquare$

Утв. пусть $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$, A - огр. сверху, $\alpha = \sup A$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A: \boxed{a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon}$

Д-во: От против: ~~Пусть~~ $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall a \in A \quad a \leq \alpha - \varepsilon_0$

$\Rightarrow \alpha - \varepsilon_0 \in M \Rightarrow \alpha$ не $\min M \Rightarrow \alpha$ не $\sup \Rightarrow$ противоречие (X)

Def Пусть $a \neq b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ (Кантор)

Пусть (для опр-сти) $a < b$, Тогда $\mathbb{R} \supset [a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

мн-во: отрезок

Тогда $\mathbb{R} \supset (a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ – интервал

$\mathbb{R} \supset [a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

$\mathbb{R} \supset (a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ — полуинтервал

Промежутки

Def $\forall a \in \mathbb{R}$ число $|a|$ – модуль a $\quad |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

Def Для $\forall$ промежутка м/у a_n в $|b-a|$ — длина промежутка

Def Рассмотрим послед. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N_\varepsilon \ |b_n - a_n| < \varepsilon$, то говорят, что длина отрезков стремится к нулю

[Th (пр-п полноты Кантора)

$\forall \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\forall n \ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

$\exists c \in \mathbb{R}$, что $c \in [a_n, b_n] \ \forall n$. Если $|b_n - a_n| \to 0$, то c — единственна

Д. $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, по 16

$\exists c \ \forall a_n, b_n \quad a_n \le c \le b_n$

пусть $|b_n - a_n| \to 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon \ |b_n - a_n| < \varepsilon$

Предпол. что $\exists c_1$ и c_2, $c_1 \ne c_2$, ...

$\forall n: a_n \le c_1 < c_2 \le b_n \Rightarrow |c_1 - c_2| \le |b_n - a_n|$

Возьмём $\varepsilon = \frac{|c_2 - c_1|}{2} \Rightarrow |c_1 - c_2| \le |b_n - a_n| \le \frac{|c_1 - c_2|}{2}$

$\Downarrow$

$|c_1 - c_2| \le \frac{|c_1 - c_2|}{2}$

$\Rightarrow |c_1 - c_2| = 0$

$\Rightarrow c_1 \equiv c_2$