§ 41. ТЕОРЕМА ГАУССА

Поток вектора напряженности. Введем еще одну физическую величину, характеризующую электрическое поле,— *поток вектора напряженности*. С помощью этой величины мы сможем рассчитать напряженности электрических полей, источниками которых являются не только точечные заряды, но и заряды, распределенные непрерывно по некоторым поверхностям — плоскости, сфере, цилиндру и т. д.

Элементарным потоком вектора напряженности через малую площадку называется произведение модуля вектора $\vec{E}$ на площадь площадки ΔS и косинус угла между вектором $\vec{E}$ и нормалью к площадке $\vec{n}_0$ (рис. 4.16):

$$\Delta\Phi = E\Delta S \cos\alpha. \qquad (41.1)$$

Заметим, что если поверхность замкнутая, то выбирается внешняя нормаль к ней.

Полный поток через поверхность равен сумме элементарных потоков через все ее участки:

$$\Phi = \Sigma\Delta\Phi = \Sigma E\Delta S \cos\alpha. \quad (41.2)$$

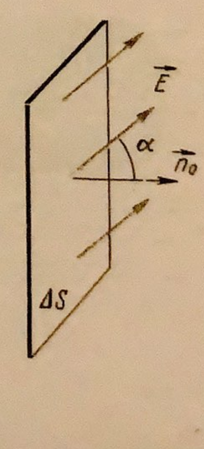

Рис. 4.16

Чтобы вычислить значение полного потока, оказывается полезным ввести еще одно вспомогательное понятие — *телесный угол.*

Мерой телесного угла Ω (рис. 4.17) служит отношение площади поверхности шарового сегмента S_0 к квадрату радиуса:

$$\Omega = S_0/r^2. \qquad (41.3)$$

Единицей телесного угла является стерадиан (сокращенно: ср) — это телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы элемент, площадь которого равна квадрату радиуса. Итак, $\Omega = 1$ ср, если $S_0 = r^2$.

Нетрудно убедиться, что полный телесный угол вокруг точки равен 4π ср. В самом деле, поверхность сферы равна $4\pi r^2$, следовательно, $\Omega_{\text{полн}} = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ ср.

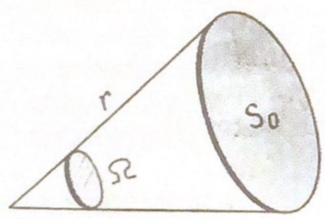

Рис. 4.17

Теорема Гаусса. Вернемся к выражению для элементарного потока (41.1). Пусть электрическое поле создается точечным зарядом q, тогда модуль вектора напряженности $E = q/(4\pi r^2)$. Подставив в (41.1), получим:

$$\Delta\Phi = E\Delta S\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta S\cos\alpha}{r^2}.$$

Как видно из рисунка 4.18, *а*, $\Delta S\cos\alpha = \Delta S_0$, при этом площадка площадью ΔS_0 перпендикулярна радиусу. Тогда

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta S_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega. \qquad (41.4)$$

Теперь уже нетрудно получи выражение для полного потока ве тора $\vec{E}$ через произвольную замкн тую поверхность:

$$\Phi = \Sigma\Delta\Phi = \Sigma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Sigma\Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = q/\varepsilon_0.$$

Таким образом, если точечный з ряд расположен внутри произвол ной замкнутой поверхности, то по ный поток вектора напряженнос через эту поверхность равен:

$$\Phi = q/\varepsilon_0. \qquad (41.5)$$

Обращаем внимание читателя н тот факт, что этот результат не з висит ни от формы поверхности, н от того, где внутри поверхности ра положен заряд.

Осталось рассмотреть случа когда заряд находится вне замкнут поверхности. Нетрудно убедитьс что поток в этом случае равен нул В самом деле (см. рис. 4.18, *б*), эл ментарные потоки $\Delta\Phi_1$ и $\Delta\Phi_2$ чере площадки ΔS_1 и ΔS_2 по модулю ра ны, ибо они вписаны в один и тот ж телесный угол $\Delta\Omega$ (см. 41.4). Однак знаки этих потоков противоположн так как угол α_1 острый и $\cos\alpha_1 > 0$ а угол α_2 тупой и $\cos\alpha_2 < 0$.

Итак, сумма этих двух элемента ных потоков равна нулю. То же буде справедливо и для всех других участ ков замкнутой поверхности. Следо вательно, если заряд расположен вн замкнутой поверхности, то поток ве тора напряженности от этого исто ника равен нулю.

Если же внутри поверхности ра положен не один точечный заря а их совокупность или если заря распределен по некоторой поверхно сти или в некотором объеме, то вы

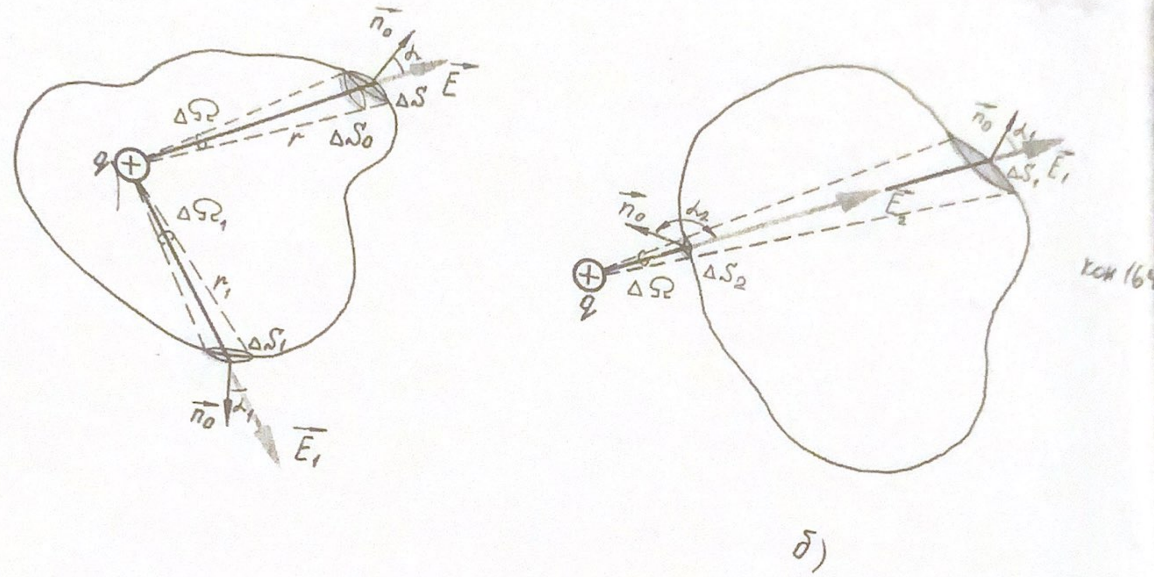

Рис. 4.18

ражение (41.5) легко обобщается (на основе принципа суперпозиции; см. с. 20 и 209):

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q_{\text{внутр}}. \qquad (41.6)$$

Это и есть *теорема Гаусса:* **поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную.**

Используя теорему Гаусса, можно вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела при условии наличия какой-либо симметрии, например симметрии относительно центра, плоскости или оси.

Напряженность поля заряженной плоскости. Применим теорему Гаусса для определения напряженности электрического поля заряженной плоскости. Если плоскость бесконечна и заряжена равномерно, т. е. *поверхностная плотность заряда* $\sigma = Q/S$ одинакова в любом ее месте, то линии напряженности электрического поля в любой точке перпендикулярны этой плоскости. Такое же направление они сохраняют и на любом расстоянии от плоскости, т. е. поле заряженной плоскости однородное.

Для нахождения напряженности электрического поля заряженной плоскости мысленно выделим в пространстве цилиндр, ось которого перпендикулярна заряженной плоскости, а основания параллельны ей и одно из оснований проходит через интересующую нас точку поля. Цилиндр вырезает из заряженной плоскости участок площадью S, и такую же площадь имеют основания цилиндра, расположенные по разные стороны от плоскости (рис. 4.19).

Согласно теореме Гаусса поток Φ вектора напряженности электрического поля через поверхность цилиндра связан с электрическим зарядом внутри цилиндра выражением

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

С другой стороны, так как линии напряженности пересекают лишь основания цилиндра, поток вектора напряженности можно выразить через напряженность электрического поля у обоих оснований цилиндра:

$$\Phi = 2ES.$$

В самом деле, поток через боковую поверхность цилиндра (см. рис. 4.19), согласно (41.2), равен нулю, поскольку $\alpha = 90°$ и $\cos\alpha = 0$.

Из двух выражений для потока вектора напряженности получим:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (41.7)$$

Напряженность электрического поля между разноименно заряженными пластинами. Если размеры пластин значительно превосходят расстояние между ними, то электрическое поле каждой из пластин можно считать близким к полю бесконечной равномерно заряженной плоскости. Так как линии напряженн электрического поля разноим заряженных пластин между н направлены в одну сторону (рис. 4 то напряженность поля между стинами равна:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (4$$

Так как

$$\sigma = \frac{Q}{S},$$

где Q — заряд одной пластины, ее площадь, то

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0}. \qquad (4$$

Во внешнем пространстве л напряженности электрического разноименно заряженных пла имеют противоположные напра ния, поэтому вне этих пластин зультирующая напряженность э трического поля практически на нулю (см. рис. 4.20).

Выражения (41.7) и (41.9) с ведливы для больших заряжен пластин, когда напряженность о деляется в точке, расположе далеко от их краев.

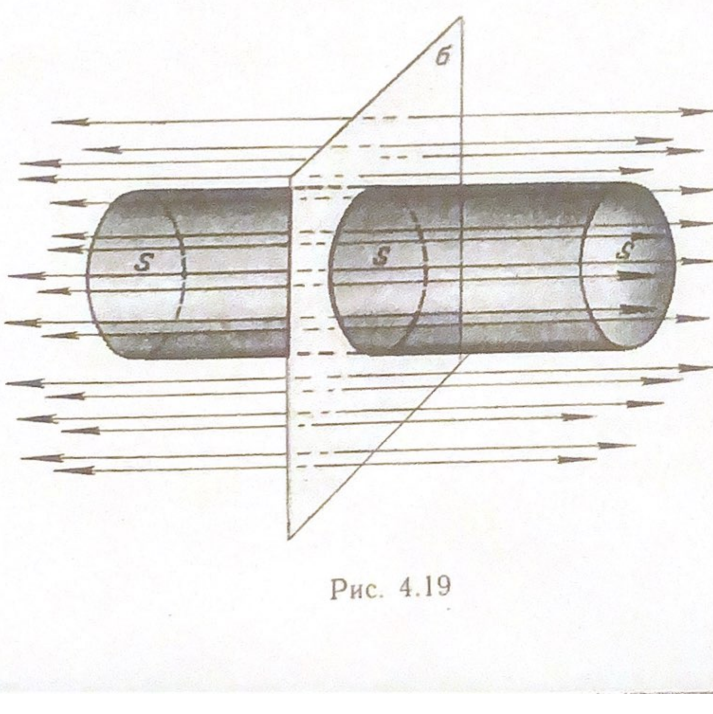

Рис. 4.19

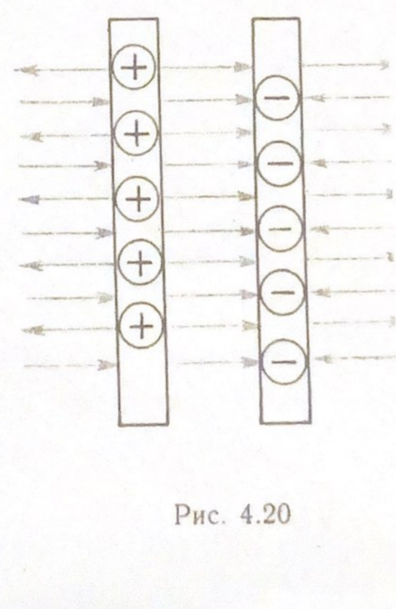

Рис. 4.20