Показательная и логарифмическая функции

Степень с действительным показателем

Будем считать известными определение и свойства степени с положительным основанием a и рациональным показателем r:

1) $a^r > 0$;
2) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$;
4) Если $r_1 < r_2$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$.

Лемма 1.(Бернулли) Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leqslant 1$. Тогда $|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a-1)$.

Следствие 1. (непрерывность в нуле для рационального показателя):
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)((r \in \mathbb{Q}, |r| < \delta) \Rightarrow (|a^r - 1| < \varepsilon))$

Определение. *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$, $r_n \in \mathbb{Q}$ Тогда*

$$a^x := \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.$$

Теорема 1.
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора сходящейся к x последовательности $\{r_n\}$;
3) в случае $x = r$ значение a^x по этому определению совпадает с прежним.

Лемма 2. *Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$. Тогда если $x < r$, то и $a^x < a^r$.*

Аналогичные утверждения верны и для $x > r$, и для $0 < a < 1$.

Теорема 2. *Все 4 перечисленные свойства степени с рациональным показателем выполняются и для степени с действительным показателем.*

Определение и свойства показательной функции

Определение. *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция $y = a^x$, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$, называется* ***показательной***.

Согласно определению степени с действительным показателем, $1^x = 1$ для всех действительных x. Поэтому рассматривать показательную функцию при $a = 1$ незачем.

Свойства показательной функции:

1) График показательной функции проходит через точку $(0; 1)$.
2) При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает на $\mathbb{R}$.
3) Функция $y = a^x$ непрерывна в каждой точке числовой оси.
4) Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел.

276. Постройте график функции: а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

277. Сравните числа: а) $(\sqrt{2})^{-0,3}$ и $(\sqrt{2})^{-0,2}$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{e}$.

278. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = -\frac{4}{x+2}$.

Задачи

279. Докажите, что $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ и $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

280. Сравните числа: а) $0,1^{-1,2}$ и $0,1^{-1,3}$; б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

281. Постройте график функции: а) $y = 2^{1-x}$; б) $y = -0,2^{|x+2|}$; в) $y = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

282. Постройте график функции $y = |2^x + 1| + |2^x - 1|$.

283. Решите неравенство $11 - x \geqslant 3^x$.

284. Найдите наибольшее целочисленное значение функции $y = 10^{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x + 0,5}$

Определение логарифма. Логарифмическая функция

Определение. Показатель степени $\boldsymbol{x}$, в которую надо возвести основание $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{b}$, называется **логарифмом числа $\boldsymbol{b > 0}$ по основанию $\boldsymbol{a}$**. То есть $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$.

285. Пользуясь только определением логарифма, вычислите: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

Дать объекту определение — еще не значит убедиться в его существовании. Для каких a и b существует $\log_a b$?

Определение. Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***логарифмической*** и обозначается $y = \log_a x$.

Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$, а вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

286. Постройте в одной системе координат графики функций:
а) $y = \log_2 x$ и $y = \log_5 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции вытекает, что функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена для всех $x > 0$ и является на этом множестве непрерывной и монотонной (возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$).

287. Сравните: а) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 6$.
288. а) Решите уравнение $3^x = 5$; б) Решите неравенства $3^x > 5$, $(0,3)^x > 5$.

Основное логарифмическое тождество. $\boxed{a^{\log_a c} = c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$.

289. Постройте график функции: а) $y = 2^{\log_2 x}$; б) $y = x^{\log_x 2}$.
290. Вычислите $9^{\log_3 5}$.

Арифметические свойства логарифмов

Теорема о логарифме произведения. $\boxed{\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Следствие. $\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема о логарифме частного. $\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

291. Вычислите: а) $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{11}(\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 7^{\log_7 4})^{2\log_5 11}$.
292. Постройте график функции: а) $y = \log_2 x^2$; б) $y = \log_2 x^3$.
293. Найдите x, если $\lg x^2 = 4\lg 3 + 2\lg 6 - \lg 9$.

Теорема о логарифме степени. $\boxed{\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.

Следствие. $\boxed{\log_{a^k} b^k = \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.

294. Вычислите $\log_4 8$.
295. Вычислите:
а) $(3\lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$; в) $\log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{125} 9^3$; д) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} + \log_{0,2} \sqrt[3]{5}$;
б) $\log_9(\log_4 \sqrt[3]{4})$; г) $8^{\log_4 3 - \log_{16} 729}$; е) $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256}$.
296. Постройте график функции: а) $y = -\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x\right) + \log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$; б) * $y = 0,5\log_2 \sin^2 x$.

Задачи

297. Решите уравнение $\lg x = \frac{2}{3}\lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3}\lg 3$.
298. Постройте график функции:
а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x)$; б) $y = 0,5^{\log_{0,5}(1-x^2)}$; в) $2^{|\log_{0,5} x|}$; г) $y = \log_2 \log_2 x$.
299. Вычислите:
а) $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$; б) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; в) $\log_5 75 + 3\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3}$; г) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$.
300. Докажите, что для любой показательной функции $f(x) = a^x$ и любой геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с положительными членами найдется такая арифметическая прогрессия $x_1, x_2, x_3, \ldots$, что для всех n будет $f(x_n) = b_n$.