

Второй замечательный предел и его следствия

Второй замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Теорема об одновременном переходе к пределу.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, причем $f(x) > 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

301. Как изменится теорема об одновременном переходе к пределу, если A и/или B заменить на ∞ ?

302. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

303. а) Укажите промежутки непрерывности функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; б) Доопределите эту функцию по непрерывности в нуле; в) Докажите первое следствие из первого замечательного предела.

Следствие 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

304. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \log_2(1+x)$, $y = \log_4(1+x)$ и $y = x$.

305. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Следствие 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

306. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$; г) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$.

307. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$.

Домашнее задание

308. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x+2)^{\frac{1}{x-1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x}}{x - \frac{\pi}{4}}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x)$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$; ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

309. Докажите:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.