

Производная-1

Определения и примеры

Определение 1. Пусть $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$ называют **приращением аргумента**, а $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — **приращением функции**.

Пример 1. Пусть приращение аргумента равно Δx . Найдите приращение функции $f(x) = x^2$ в данной точке x_0 , если: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$.

в) В какой из этих точек функция растёт быстрее?

г) Запишите приращение функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 в общем виде.

Определение 2. Пусть материальная точка движется прямолинейно и ее координата зависит от времени по закону $s = s(t)$. Тогда

$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется **средней скоростью** точки, а

$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ — ее **мгновенной скоростью** в момент времени t_0 .

Пример 2. Точка движется по оси Ox , ее координата изменяется со временем по закону $x = t^2$, где t — время в секундах, а единичный отрезок равен 1.

а) Найдите среднюю скорость точки в течение первой секунды; в течение второй секунды.

б) Найдите мгновенную скорость точки через 1 секунду после начала движения; через 2 секунды.

Определение 3. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Выберем на нем две точки: $M(x_0; f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Тогда прямая MM_1 называется **секущей**, а ее предельное положение при $\Delta x \rightarrow 0$ — **касательной** к графику в точке x_0 .

Пример 3. Определите угловой коэффициент:

а) секущей к графику функции $f(x) = x^2$, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$;

б) касательных к этому графику в точках $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

в) Напишите уравнения этих касательных.

Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Функция, имеющая конечную производную в точке x_0 , называется **дифференцируемой** в этой точке.

При существовании только односторонних пределов говорят соответственно о производной слева или справа.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой на множестве**, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Функция, равная $f'(x)$ в любой точке этого множества, называется **производной функции f** .

Правила дифференцирования. Дифференцирование рациональных функций и корней.

310. Найдите по определению производные следующих функций:

а) $y = C$; б) $y = x$; в) $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$; г) $y = \frac{1}{x}$; д) $y = \sqrt{x}$; е) $y = \sqrt[3]{x}$.

311. Докажите, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Теорема. Функция, дифференцируемая в данной точке, непрерывна в ней.

Замечание. Обратное неверно.

Теорема (правила дифференцирования). Если функции u и v дифференцируемы на множестве M , то:

функция Cu дифференцируема на M , причем $(Cu)' = Cu'$;

функция $u + v$ дифференцируема на M , причем $(u + v)' = u' + v'$;

функция uv дифференцируема на M , причем $(uv)' = u'v + uv'$;

если $v(x) \neq 0$ при всех $x \in M$, то функция $\frac{u}{v}$ дифференцируема на M , причем $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

312. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2x - 4$; б) $y = \frac{x - 3}{2x + 5}$; в) $y = \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 8}$.

313. Найдите производную функции $y = (\sqrt{x} + 2) \left(3x^2 - \frac{1}{x} \right)$ в точке $x_0 = 1$.

314. Продифференцируйте функцию $y = (x^2 - 3x + 1)(2x - 4)$ двумя способами. Когда удобнее раскрывать скобки: до или после дифференцирования?

315. В каких точках непрерывны и в каких дифференцируемы следующие функции:

а) $y = |x|$; б) $y = \text{sign}(x)$; в) $y = \sqrt[3]{x}$; г) $y = (x - 1)D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле?

316. При каких значениях a и b функция

$$\begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

а) непрерывна на всех числовой прямой;

б) дифференцируема на всех числовой прямой?

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 , а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $F(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 , причем $F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

317. Докажите, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ верна для всех $n \in \mathbb{Z}$.

318. Найдите производные следующих функций:

а) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$; в) $y = \frac{1}{(2x+1)^5}$; д) $y = \sqrt[3]{\frac{5-2x}{4x+1}}$;
 б) $y = (x^2 - 4x + 5)^2$; г) $y = \sqrt{1-x^2}$; е) $y = \sqrt{x - \sqrt{2x - \sqrt{x-1}}}$.

319. Найдите производную функции $y = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ двумя способами (упростить выражение можно до дифференцирования, а можно после).

Определение. $f''(x) = (f'(x))'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$

320. Вычислите производные:

а) $\left(\frac{x^3}{x-1}\right)''$; в) $(2x^6 - 6x^4 + 1)^{(4)}$; д) $((x^2 - 1)^6(x^3 + 5)^{10})^{(50)}$; ж) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}$;
 б) $\left(\frac{2x^3}{x^2-4}\right)''$; г) $(x^m)^{(n)}$; е) $((x^2 - 1)^6(x^3 + 5)^{10})^{(42)}$; з) $\left(\frac{1}{x^2 + 7x + 12}\right)^{(48)}$.

Физический смысл производной

Мгновенная скорость равна производной координаты по времени. А какая физическая величина соответствует второй производной координаты по времени?

321. Закон движения точки по оси Ox задается формулой $x = 10t + 5t^2$, где t — время в секундах, а x — расстояние в метрах. Найдите скорость и ускорение точки в момент $t = 20$.

322. а) По данным графикам зависимости координаты от времени начертите графики зависимости скорости и ускорения от времени.

б) По данным графикам скорости начертите графики координаты и ускорения.

Производная есть мгновенная скорость изменения функции. С помощью производной определяется мгновенная скорость изменения массы вещества в процессе радиоактивного распада, растворения в воде и т.п.

Домашнее задание

323. а) Найдите, пользуясь определением, производную функции $\frac{1}{x^3}$; б) Пользуясь свойствами производной.

324. Вычислите производные следующих функций:

а) $x^7 - \frac{1}{6}x^6 + x - 100$; б) $\frac{3x-5}{1-2x}$; в) $(x+1)(x+2)(x+3)$; г) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

325. Вычислите:

а) $\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)'$; б) $(\sqrt{x^2 + \sqrt{x+1}})'$; в) $(\sqrt{x^2+1})''$; г) $\left(\frac{1}{(3x-1)^4}\right)''$; д) $\left(\frac{x^2+2x-1}{\sqrt[3]{2x^2+1}}\right)'$.

326. Вычислите:

а) $\left(\frac{3x^2-6x+3}{x^2-2x+1}\right)^{(10)}$; б) $\left(\frac{x^{10}-x^9-x^8+2}{x^2-x-1}\right)^{(9)}$; в) $((x^5-6)^7(x^2+1)^{10})^{(54)}$.

327. Тело, брошенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0 , движется по закону

$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Найдите высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 2 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 4$, $v_0 = 3$ и $g \approx 10^2$.